UNIVERSITÉ DE SAVOIE
(Laboratoire de Mathématiques)

STRUCTURES O-MINIMALES, CORPS DE HARDY ET ENSEMBLES DE PETITE ARITÉ

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 13 Décembre 2005
à l'Institut Henri Poincaré
en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université de Savoie
Spécialité : Mathématiques

par

SERGE RANDRIAMBOLOLONA

après avis de :

J.-M. LION	(Univ. Rennes 1)	**Rapporteur**
Y. PETERZIL	(Haïfa Univ.)	**Rapporteur**

devant le Jury composé de :

F. DELON	(Univ. Paris 7)	**Présidente du Jury**
M. COSTE	(Univ. Rennes 1)	**Membre**
K. KURDYKA	(Univ. de Savoie)	**Directeur de thèse**
P. SPEISSEGGER	(McMaster Univ.)	**Directeur de thèse**
J.-M. LION	(Univ. Rennes 1)	**Rapporteur**

Remerciements

On ne sait jamais vraiment ce que l'on doit et à qui on le doit[1] ; voilà ce que je peux démêler dans le peu de temps qu'il me reste avant la soutenance.

Il me faut d'abord remercier Krzysztof Kurdyka, pour m'avoir initié à la géométrie réelles. J'ai apprécié la confiance qu'il a accordé, confiance qui dépassait d'ailleurs bien souvent la mienne, en les furtives intuitions qui ont ponctué mon travail. Je lui suis gré de l'autonomie qu'il m'a laissé dans le choix des questions auxquelles je me suis attaqué. Son enthousiasme et ses idées fulgurantes ont eu raison de nombreuses difficultés techniques et de ma propension au découragement.

Patrick Speissegger m'a fait l'honneur de m'inviter à l'Université du Wisconsin et à celle de McMaster. La perspective de ces voyages a été systématiquement le déclencheur d'un état d'euphorie scientifique qui ont induit des bonds dans la progression de mon travail. J'ai aussi apprécié son soucis de précision qui m'ont contraint à éclaircir de nombreux points de mon travail (et ont même parfois révélé des trous dans mes preuves).

Je dois à Rémi Soufflet la question centrale résolue dans cette thèse. L'intérêt qu'il a montré à mon travail durant sa réalisation m'a beaucoup encouragé.

J'ai eu de nombreux autres interlocuteurs durant ces dernières années. Ceux à qui je dois le plus sont surement Guillaume Valette et Daniel Miller. Il me faut aussi citer Fabrice Rosay et Sergio Fratarcangeli.

Il est aussi toujours étonnant pour un jeune chercheur de voir que son travail intéresse les chercheurs confirmés. Je remercie Jean-Philippe Rolin, Serguei Starchenko, Chris Miller, Jean-Marie Lion et Kobi Peterzil pour leur attention, leurs remarques et leurs encouragements. Ces deux derniers m'ont en outre fait l'honneur d'accepter de rapporter cette thèse ; les remarques de Kobi m'ouvrent des perspectives très intéressantes. Quant à Jean-Marie, j'attends avec anxiété les questions qu'il risque de me poser en fin de soutenance.

Merci enfin à Françcoise Delon pour avoir accepté de présider mon jury et à Michel Coste pour avoir accepté d'y prendre part. Il me faut aussi à travers lui remercier tout le réseau RAAG pour les écoles et conférences qui ont facilité mon insertion dans la communauté des géomètres réels.

[1] Des remerciements ne sont jamais complets sans une référence à ses proches ; je dédie donc cette note de bas de page à ma famille, mes amis et mes camarades.

Serge RANDRIAMBOLOLONA

STRUCTURES O-MINIMALES, CORPS DE HARDY ET ENSEMBLES DE PETITE ARITÉ

Serge RANDRIAMBOLOLONA
Université de Savoie, Le Bourget-du-Lac, France.
E-mail : `Serge.Randriambololona@ens-lyon.org`

Mots clefs. — structures o-minimales, corps de Hardy , problème de superposition.

28 novembre 2005

STRUCTURES O-MINIMALES, CORPS DE HARDY ET ENSEMBLES DE PETITE ARITÉ

Serge RANDRIAMBOLOLONA

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Un bref historique

Avant même que soit donnée la définition de ce qu'est une structure o-minimale, on trouve deux exemples fondateurs.

Le premier est la structure des ensembles semi-algébriques, comme l'assure le théorème de TARSKI dans les années 40.

L'histoire du second est plus longue : dans les années 60, l'école de ŁOJASIEWICZ définit la classe des ensembles *semi-analytiques*, avant de s'intéresser aux projetés de ceux-ci.

Mais l'exemple d'OSGOOD $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \exists t \in [0, 1] z = ye^t, x = yt\}$ assure que cette classe n'est pas stable par projection.

GABRIELOV puis HIRONAKA introduisent alors, pour X une variété analytique, la classe des ensembles *sous-analytiques de X* , classe des sous-ensembles de X qui, au voisinage de tout point de X s'écrivent comme projeté propre d'une variété analytique réelle.

En se restreignant aux ensembles sous-analytiques de $P(\mathbb{R})^n$ inclus dans $\mathbb{R}^n$ (*ensembles sous-analytiques globaux*), GABRIELOV prouve que le complémentaire d'un ensemble sous-analytique global est lui aussi un ensemble sous-analytique global, ce qui implique de nombreuses propriétés de finitude pour la structure des ensembles sous-analytiques globaux.

Parallèlement se développe un cadre qui généralise ces deux exemples : c'est la théorie des structures o-minimales introduite par KNIGHT,PILLAY et STEINHORN ainsi que VAN DEN DRIES.

La théorie des structures o-minimales est une approche axiomatique dans laquelle se généralise la plupart des propriétés des ensembles semi-algébriques et sous-analytiques globaux : outre la stabilité des ensembles définissables dans une structure o-minimale par la plupart des opérations géométriques élémentaires, on y trouve un théorème de décomposition cellulaire, de triangulation, de trivialisation, de stratification régulière.

D'un point de vue de la théorie des modèles, c'est aussi un exemple de famille de structures dont la théorie est *géométrique* : il y existe une bonne notion de dimension et on possède un bon contrôle sur les ensembles définissables : l'arithmétique n'est pas interprétable.

D'un point de vue géométrique, la théorie des structures o-minimales apparait à certains comme une réalisation du projet de *géométrie modérée* proposé par GROTHENDIECK dans son *Esquisse d'un Programme*.

Aujourd'hui, les spécialistes des structures o-minimales travaillent dans deux directions principales : la première consiste à prouver des résultats généraux, la seconde à construire de nouveaux exemples de structures o-minimales ou prouver la o-minimalité de certaines structures.

Les ensembles définissables de petite arité

La propriété de o-minimalité consiste à imposer la famille des ensembles définissables d'arité 1 comme étant la plus petite possible ; le mot *o-minimal* est d'ailleurs une contraction de l'anglais *order-minimal*.

Ainsi, deux expansions o-minimales $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ d'un même ensemble ordonné $(X;<)$ définissent-elles les mêmes sous-ensembles de X ; on a dès lors envie d'étudier l'entier n à partir duquel ces deux structures ne définissent plus les mêmes sous-ensembles de X^n.

La première question abordée dans ce travail est d'étudier si $n = 2$ peut être une borne uniforme. Il s'agit de répondre à la question suivante :

> [**Q1**] « *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux expansions o-minimales d'un même ensemble ordonné $(X;<)$. Supposons que les sous-ensembles de X^2 qui sont définissables dans $\mathcal{A}$ sont exactement ceux qui sont définissables dans $\mathcal{B}$.*
>
> *Ces deux structures définissent-elles les mêmes ensembles en toute dimension ?* »

Les propriétés des ensembles définissables d'arité deux d'une structure o-minimale donne beaucoup d'information géométriques.

L'un des exemples les plus marquants est le théorème 1.3.7 de dichotomie de Miller : on peut discriminer les expansions o-minimales du corps ordonné des réels *qui ne définissent pas le graphe de l'exponentielle* au fait que la croissance des fonctions d'une variable qu'elles définissent est *au plus polynomiale*.

Le comportement géométrique de ces structures o-minimales, dites *polynomialement bornées*, et de celles qui définissent l'exponentielle diffèrent alors grandement, du fait de l'existence dans les secondes de fonctions plates.

D'autre part, à chaque expansion o-minimale d'un corps réel clos, on peut associer un *corps de Hardy* : l'ensemble des germes à l'infini des fonctions définissables, muni de sa structure de corps différentiel ordonné.

Dans [**9**], van den Dries et Macintyre et Marker utilisent déjà des propriétés de valuation d'un corps de Hardy pour étudier une propriété de o-minimalité de même que Miller et Starchenko dans [**22**].

Une réponse positive à [**Q1**] aurait assuré l'injectivité de la fonction qui a une expansion o-minimale du corps des réels associe le corps de Hardy de ses germes à l'infini et ainsi de ramener de nombreuses propriétés d'une structure o-minimale à l'étude de propriété du corps de Hardy associé.

Dans la **Première Partie** nous étudions les structures o-minimales dont les ensembles définissables d'arité deux sont exactement (tous) les ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$.

Dans le **chapitre 2**, nous prouvons que la structure $\mathcal{CSA}$ engendrée par les courbes semi-algébriques est strictement plus petite que la structure $\mathcal{SA}$ de tous les semi-algébriques.

On a ainsi un contre-exemple à la question [**Q1**] : les structures $\mathcal{CSA}$ et $\mathcal{SA}$ définissent les mêmes sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ mais pas les mêmes sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Pour montrer que la structure de tous les ensembles semi-algébriques définit strictement plus d'ensembles que la structure engendrée par les courbes semi-algébriques, nous prouvons que la théorie de la structure engendrée par semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ élimine ses quantificateurs dans un langage approprié.

On déduit alors facilement que cette structure ne définit pas le graphe de l'addition.

Le contre-exemple du chapitre 2 a l'inconvénient de mettre en jeu une structure o-minimale qui n'est pas une expansion d'un corps réel clos. Par ailleurs, c'est une structure *triviale*, c'est à dire qu'elle ne définit pas de fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante en chacune de ses variables.

Dans le **chapitre 3**, nous montrons que, en un certain sens, nous ne pouvions pas nous passer d'une structure qui ne soit pas une expansion d'un corps réel clos.

C'est le théorème 3.1.1 :

> Il n'y a pas d'expansion stricte du corps ordonné des réels qui
> – admette un théorème de décomposition $\mathcal{C}^\infty$ et
> – dont les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}^2$ sont tous des ensembles semi-algébriques.

Pour savoir si une expansion o-minimale « lisse » du corps ordonnée des réels définit des sous-ensembles d'un certains $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas semi-algébriques, il suffit de regarder les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ qu'elle définit.

Dans le **chapitre 4**, nous terminons de nous convaincre que l'exemple du **chapitre 2** est optimal : il n'y a pas de structure o-minimale entre $\mathcal{CSA}$ et $\mathcal{SA}$.

Ce chapitre est une mise en œuvre du théorème de trichotomie pour les structures o-minimales prouvé dans [**28**] : nous construisons le corps des réels à partir des ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ et de n'importe quel ensemble semi-algébrique qui n'est pas définissable dans $\mathcal{CSA}$.

On a ainsi classifié les expansions de $\mathbb{R}$ dont les ensembles d'arité deux sont exactement les ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$. Historiquement, ce travail se rapproche donc de la réponse fournie à van den Dries dans [**25**] et [**29**], de classification des structures comprises entre celle des ensembles semi-linéaires et celle des ensembles semi-algébriques.

Dans la **Seconde Partie**, nous donnons un autre contre-exemple [(1)] à la question [**Q1**]. Nous donnons par la même un contre-exemple à la question :

> [**Q2**] « *Soit $\mathcal{A}$ une expansion o-minimale du corps ordonné des réels. Existe-t-il un entier n_0 tel que si on se donne une structure o-minimale $\mathcal{B}$ définissant les même sous-ensembles de $\mathbb{R}^{n_0}$ alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définissent les même ensembles en toute dimension ?* »

Une réponse négative à [**Q2**] assure en particulier qu'une structure o-minimale n'est pas nécessairement générée par la famille des ensembles qu'elle définit en une arité fixée : il s'agit donc d'un problème de superposition, s'apparentant à la solution donné par Kolmogorov au Treizième Problème de Hilbert : en composant des fonctions de deux variables, on obtient des fonctions d'autant de variables que l'on veut ; ainsi $(x, y, z) \mapsto x + y + x \cdot z$ est la fonction $(x, y, z) \mapsto h(x, h(y, g(x, z)))$ où h est la fonction de deux variables $(s, t) \mapsto s + t$ et g la fonction $(s, t) \mapsto s \cdot t$.

Le Treizième Problème consiste à savoir si on peut trouver une application $f : [0, 1]^3 \to \mathbb{R}$ qui s'écrive comme composée de fonctions *continues à deux variables* et telle que

$$f(x, y, z)^7 + x \cdot f(x, y, z)^3 + y \cdot f(x, y, z)^2 + z \cdot f(x, y, z) \equiv 1.$$

En prouvant que toute fonction continue à trois variables s'écrit comme composée de fonctions à deux variables, Kolmogorov répond à ce problème par la positive.

Dans notre problème, nous restreignons les fonctions à obtenir et à superposer à l'ensemble des fonctions définissable dans une structure o-minimale donnée, mais nous nous autorisons des règles de superposition plus souple que celle de Hilbert, puisque, outre la composition, nous autorisons l'usage de fonctions implicites et d'opérations booléennes.

Le contre-exemple que nous produisons nous assure alors que, pour tout $n \geq 2$, il existe certaines fonctions sous-analytiques globales à n variables qui ne peuvent pas être obtenues en superposant des fonctions sous-analytiques globales à $n - 1$ variables.

[(1)] Cette construction est publiée dans [**33**].

Première PARTIE I

SEMI-ALGÉBRICITÉ EN ARITÉ DEUX

Maintenant, repris-je, figure-toi des hommes dans une demeure souterraine, en forme de caverne, ayant sur toute sa largeur une entrée ouverte à la lumière ; ces hommes sont là depuis leur enfance, les jambes et le cou enchaînés, de sorte qu'ils ne peuvent bouger ni voir ailleurs que devant eux, la chaîne leur empêchant de tourner la tête ; la lumière leur vient d'un feu allumé sur une hauteur, au loin derrière eux ; entre le feu et les prisonniers passe une route élevée : imagine que le long de cette rue est construit un petit mur, pareil aux cloisons que les montreurs de marionnettes dressent devant eux, et au dessus desquelles ils font voir leurs merveilles.

Je vois cela, dit-il.

Figure-toi maintenant le long de ce petit mur des hommes portant des objets de toute sorte, qui dépassent le mur, et des statuettes d'hommes et d'animaux, en pierre, en bois, et en toute espèce de matière ; naturellement, parmi ces porteurs, les uns parlent et les autres se taisent.

Voilà, s'écria-t-il un étrange tableau et d'étranges prisonniers.

Ils nous ressemblent, repondis-je ; et d'abord, penses-tu que dans une telle situation ils aient jamais vu autre chose d'eux-mêmes et de leurs voisins que les ombres projetées par le feu sur la paroi de la caverne qui leur fait face ?

Platon,
La République, livre 7.

CHAPITRE 1

STRUCTURES O-MINIMALES ET CORPS DE HARDY

Nous rappelons ici quelques définitions et quelques propriétés classiques associées : structures, structures o-minimales, décomposition cellulaire et corps de Hardy.

1.1. Structures

Définition 1.1.1. — Une structure $\mathcal{M} = (M; \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ est la donnée

1. d'un ensemble non vide M, l'*univers*,
2. d'un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de M, l'ensemble des *constantes nommées*,
3. d'un ensemble $\mathcal{R} = \amalg_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{R}_n$ avec $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{P}(M^n)$, l'ensemble des *relations nommées*,
4. d'un ensemble $\mathcal{F} = \amalg_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{F}_n$ avec $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}(M^n, M)$, l'ensemble des *fonctions nommées*.

Exemple 1.1.2. — La structure du corps ordonné des réels

$$\mathcal{SA} = (\mathbb{R}\,; \{0,1\}, \{<\}, \{+, -, \ \cdot\ \})$$

a ainsi pour univers $\mathbb{R}$, pour constantes nommées 0 et 1, pour fonctions nommées les applications $(x,y) \to x+y$, $(x,y) \to x-y$ et $(x,y) \to xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et ses relations nommées se réduisent à l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$.

Fixons une structure $\mathcal{M} = (M; \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Définition 1.1.3. — Abusant de la terminologie standard, nous appelons *ensemble des $\mathcal{M}$-termes* le plus petit ensemble $\mathcal{T} = \amalg_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_m$ avec $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{F}(M^n, M)$ tel que

1. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $c \in \mathcal{C}$, l'application
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto c$$
appartient à $\mathcal{T}_n$,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$
appartient à $\mathcal{T}_n$,
3. pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, si $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathcal{T}_m)^n$ et $f \in \mathcal{F}_n$ alors l'application
$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(t_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$
appartient à $\mathcal{T}_m$.

L'arité d'un terme t est l'unique n pour lequel $t \in \mathcal{T}_n$.

L'ensemble des termes est l'ensemble des applications obtenu par clôture par composition de l'ensemble des applications constantes égales à une constante nommée, de l'ensemble des fonctions nommées et de l'ensemble des applications qui à un n-uplet associe sa $i$ème composante.

Exemple 1.1.4. — Dans la structure $\mathcal{SA}$ les termes sont les polynômes (à plusieurs variables) à coefficients entiers.

Définition 1.1.5. — Un sous-ensemble X de M^n est *définissable par une formule sans quantificateur sans paramètre* si et seulement si cet ensemble peut s'écrire comme combinaison booléenne finie d'ensembles de l'une des formes suivantes :

1. $\{\overline{x} \in M^n; t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})\}$ où t_1 et t_2 sont des termes d'arité n ou
2. $\{\overline{x} \in M^n; R(t_1(\overline{x}), \cdots, t_m(\overline{x})\}$ où R est une relation nommée d'arité m et $t_1, \cdots, t_m$ sont des termes d'arité n.

Un sous-ensemble X de M^n est *définissable par une formule sans quantificateur* si et seulement si il existe un $p \in \mathbb{N}$, un p-uplet $(a_1, \cdots, a_p) \in$

M^p et un ensemble $Y \subseteq M^{n+p}$ définissable par une formule sans quantificateur sans paramètre tel que

$$X = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_p) \in Y\}.$$

Exemple 1.1.6. — Les ensembles définissables par une formule sans quantificateur et sans paramètre dans la structure $\mathcal{SA}$ sont les ensembles qui s'écrivent comme union finie d'ensembles de la forme

$$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n; P(\overline{x}) = 0, Q_1(\overline{x}) > 0, \ldots, Q_m(\overline{x}) > 0\}$$

où P et les Q_i sont des polynômes à n variables, à coefficients entiers.

Les ensembles définissables par une formule sans quantificateur (avec paramètres) y sont ceux qui s'écrivent comme union finie d'ensembles de la forme

$$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n; P(\overline{x}) = 0, Q_1(\overline{x}) > 0, \ldots, Q_m(\overline{x}) > 0\}$$

où P et les Q_i sont des polynômes à n variables, à coefficients réels.

On appelle ces ensembles les ensembles *semi-algébriques réels*.

Définition 1.1.7. — La collection des ensembles définissables est le plus petit sous-ensemble $\langle \mathcal{M} \rangle = (\langle \mathcal{M} \rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\amalg_{n\in\mathbb{N}^*}\mathcal{P}(M^n)$ tel que

1. tout ensemble définissable par une formule sans-quantificateur est élément de $\langle \mathcal{M} \rangle$,
2. si $X \subseteq M^n$ appartient à $\langle \mathcal{M} \rangle$ alors $M^n \setminus X$ appartient à $\langle \mathcal{M} \rangle$,
3. si $X \subseteq M^{n+1}$ appartient à $\langle \mathcal{M} \rangle$ alors

$$\{(x_1, \cdots, x_n) \in M^n; \exists y \in M, (x_1, \cdots, x_n, y) \in X\}$$

appartient à $\langle \mathcal{M} \rangle$.

On dit qu'une fonction (partielle) de M^n dans M est définissable si son graphe $\Gamma \subseteq M^{n+1}$ est un ensemble définissable.

L' arité d'un ensemble définissable A est l'entier n pour lequel $A \subseteq M^n$; l'arité d'une fonction définissable f est le nombre de variables desquelles elle dépend.

La collection des ensembles définissables [1] est donc la clôture des singletons et des graphes des relations et fonctions nommées par les opérations ensemblistes naturelles : permutation des coordonnées, union, intersection, passage au complémentaire, produit cartésien et projection cartésienne.

Définition 1.1.8. — On dit qu'une structure élimine ses quantificateurs si tout ensemble définissable est aussi définissable sans l'aide de quantificateur.

Définition 1.1.9. — Une structure d'univers M est *modèle-complète* si et seulement si tout ensemble définissable $X \subseteq M^n$ s'écrit sous la forme

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n ; \exists (y_1, \ldots, y_p) \in M^p, (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \in Y\},$$

pour un entier p et un ensemble définissable à l'aide d'une formule sans quantificateur $Y \subseteq M^{n+p}$ (p et Y dépendant de X).

Si l'on considère les ensembles définissables sans quantificateur comme des ensembles « simples », c'est l'alternance des opérations de projection et de passage au complémentaire dans la description de chaque ensemble définissable qui mesure la complexité de celui-ci.

L'élimination des quantificateurs et la modèle-complétude imposent alors un contrôle sur la complexité des ensembles définissables.

***Théorème 1.1.10* (Théorème de Tarski-Seidenberg, [39])**
La structure $\mathcal{SA}$ élimine ses quantificateurs.

Les ensembles définissables dans $\mathcal{SA}$ sont donc exactement les ensembles semi-algébriques réels : le projeté d'un ensemble semi-algébrique réel est lui-même un ensemble semi-algébrique réel.

Définition 1.1.11. — Si $\mathcal{M} = (M; \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ et $\mathcal{M}' = (M'; \mathcal{C}', \mathcal{R}', \mathcal{F}')$ sont deux structures, on dit que $\mathcal{M}'$ est une expansion de $\mathcal{M}$ (ou que $\mathcal{M}$ est un réduit de $\mathcal{M}'$) si $M = M'$ et $\langle \mathcal{M} \rangle \subseteq \langle \mathcal{M}' \rangle$ (c'est à dire que

[1] Nous avons choisi une définition intermédiaire entre la définition classique issue de la théorie des modèles de structure comme interprétation d'un langage et celle issue de [**7**] qui identifie chaque structure avec la collection de ses ensembles définissables. Ceci nous permet de distinguer, parmi les ensembles définissables, ceux qui le sont sans l'aide de quantificateur.

tous les ensembles définissables dans la structure $\mathcal{M}$ le sont aussi dans la structure $\mathcal{M}'$).

1.2. O-minimalité

Définition 1.2.1. — On dit qu'une expansion de $(\mathbb{R}\,;\emptyset,\{<\},\emptyset)$ est *o-minimale* si les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}$ sont exactement les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui s'écrivent comme union finie de singletons et d'intervalles ouverts.

Dans la suite, nous noterons $(\mathbb{R};<)$ la structure $(\mathbb{R}\,;\emptyset,\{<\},\emptyset)$.

L'hypothèse de o-minimalité consiste à imposer la famille des ensembles d'arité 1 comme étant la plus petite possible : dans une expansion de $(\mathbb{R};<)$ on sait que les combinaisons booléennes finies d'ensembles de la forme $\{x \in X; x < a\}$ et de la forme $\{x \in X; x > b\}$ sont des sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}$; dans une structure o-minimale, il n'y en a pas d'autres.

En particulier, la complétude de $\mathbb{R}$ assure qu' une expansion finie de $(\mathbb{R};<)$ est o-minimale si et seulement si les ensembles d'arité 1 ont un nombre fini de composantes connexes.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la topologie produit issue de la topologie issue de l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

Sous ces hypothèses, l'adhérence d'un ensemble définissable $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est définissable. De même le lieu des points de continuité d'une fonction définissable forme un ensemble définissable.

1.2.1. Décomposition cellulaire. — La finitude du nombre de composantes connexes d'un ensemble d'arité 1 définissable dans une structure o-minimale se généralise aux ensembles d'arité supérieure : c'est le théorème de *décomposition cellulaire*.

Fixons une expansion o-minimale de $(\mathbb{R};<)$.

Définition 1.2.2. — Une décomposition cellulaire définissable $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ est une partition finie de $\mathbb{R}^n$ en ensembles, les *cellules*, satisfaisant par récurrence sur n les propriétés suivantes :

- Pour $n = 1$, on se donne un nombre fini de réels $a_1 < \ldots < a_l$. Les cellules de notre décomposition cellulaire sont alors les singletons

$\{a_i\}$ et les intervalles ouverts $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in \{0, \ldots, l\}$, en posant $a_0 = -\infty$ et $a_{l+1} = +\infty$.

- Pour $n > 1$, il existe une décomposition cellulaire $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ et pour chaque cellule $D \in \mathcal{D}$, il existe des fonctions définissables continues
$$\zeta_{1,D}, \ldots, \zeta_{l(D),D} : D \to \mathbb{R}$$
telles que $\forall x \in D, 1 \leq l \leq l(D) - 1 \Rightarrow \zeta_{l,D}(x) < \zeta_{l+1,D}(x)$.
On définit alors les cellules de notre décomposition cellulaire de $\mathbb{R}^n$ comme les ensembles de l'une des formes suivantes :
  – les graphes $\Gamma_D(\zeta_{l,D}) = \{(x, \zeta_{l,D}(x)), x \in D\}$, où D parcourt $\mathcal{D}$ et l parcourt $\{1 \cdots, l(D)\}$
  – les bandes $(\zeta_{l,D}, \zeta_{l+1,D})_D = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R}; \zeta_{l,D}(x) < y < \zeta_{l+1,D}(x)\}$, où D parcourt et l parcourt $\{0 \cdots, l(D)\}$, en convenant que les fonctions $\zeta_{0,D}$ sont constantes égales à $-\infty$ et les fonctions $\zeta_{l(D)+1,D}$ sont constantes égales à $+\infty$

Remarquons que chaque cellule est un ensemble définissable.

***Théorème 1.2.3* ([7], Chapitre 3, Théorème 2.11.)**
Considérons $A_1, \ldots, A_k$ des parties définissables de $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une décomposition cellulaire $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque A_i est réunion de cellules de $\mathcal{C}$.

On dit alors que cette décomposition cellulaire est adaptée *aux ensembles $A_1, \ldots A_k$.*

Définition 1.2.4. — On définit par récurrence la dimension d'une cellule C, notée $\dim C$:

- Pour $n = 1$, la dimension d'un singleton est 0 ; celle d'un intervalle ouvert non vide 1,
- Pour $n > 1$, si C est un graphe $\Gamma_D(f)$ au dessus d'une cellule D alors $\dim C = \dim D$; si C est une bande $(f, g)_D$ au dessus d'une cellule D alors $\dim C = \dim D + 1$.

La dimension d'une cellule correspond ainsi à la dimension de cette cellule vue comme sous-variété topologique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.5. — Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable.

Sa dimension est l'entier $\max\{\dim C\,; C$ est une cellule et $C \subseteq A\}$; on le note $\dim A$.

Proposition 1.2.6 **([7], Chapitre 4, Proposition 1.3.)**

1. *Si* $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *avec* X *et* Y *définissables alors*
$$\dim X \leq \dim Y \leq m.$$
2. *Si* X *et* Y *sont deux ensembles définissables et s'il existe une bijection définissable entre* X *et* Y *alors*
$$\dim X = \dim Y.$$
3. *Si* X *et* Y *sont deux sous-ensembles définissables de* $\mathbb{R}^m$ *alors*
$$\dim(X \cup Y) = \max\{\dim X, \dim Y\}.$$

En particulier, les définitions 1.2.4 et 1.2.5 coïncident.

Proposition 1.2.7. — *Si* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *est une cellule de dimension* d*, il existe une cellule ouverte* $\widetilde{C} \subseteq \mathbb{R}^d$ *et un homéomorphisme définissable* ϕ *entre* C *et* $\widetilde{C}$.

Démonstration. — Par récurrence sur n.
- Si $n = 1$, le résultat est clair.
- Supposons le résultat établi au rang précédent et considérons une cellule $C \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension $d \geq 1$.
  Si C est la bande $(f, g)_D$ au dessus de la cellule $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, alors par hypothèse de récurrence on a une cellule ouverte $\widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ et une bijection ψ entre D et $\widetilde{D}$. La cellule $\widetilde{C} := \{(x, y) \in \widetilde{D} \times \mathbb{R}; f(\psi(x)) < y < g(\psi(x))\}$ et la bijection $\phi : \widetilde{C} \to C$ donnée par $\phi(x, y) = (\psi(x), y)$ conviennent.
  Si C est le graphe $\Gamma_D(f)$ au dessus de la cellule $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, alors par hypothèse de récurrence on a une cellule ouverte $\widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ et une bijection ψ entre D et $\widetilde{D}$. La cellule $\widetilde{C} := \widetilde{D}$ et la bijection $\phi : \widetilde{C} \to C$ donnée par $\phi(x) = (\psi(x), f(\psi(x))$ conviennent.

$\square$

Dans le cas où la structure considérée est une expansion du corps ordonné des réels $\mathcal{SA} = (\mathbb{R}\,; \{0, 1\}, \{<\}, \{+, -, \ \cdot\ \})$, on peut améliorer cette proposition :

Proposition 1.2.8 **([6], Proposition 2.5.)**. — *Soit* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *une cellule de dimension* d *dans une expansion o-minimale* $\mathcal{S}$ *du corps ordonné des réels.*

Il existe un homéomorphisme définissable dans $\mathcal{S}$ *entre* C *et* $\mathbb{R}^d$*.*

Mieux, dans ce cadre, la définissabilité du graphe de la division et de la soustraction assure la stabilité par dérivation de l'ensemble des fonctions définissables ; on peut alors imposer une certaine régularité des cellules :

Définition 1.2.9. — Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \infty$.

Une application définissable $f : A \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si il existe un voisinage ouvert définissable U de A et une application $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $f = F|_A$

On définit par récurrence sur n ce qu'est une cellule de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$:

- Toute cellule de $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$
- pour $n > 1$, une cellule $\Gamma_D(f)$ (ou $(g, h)_D$) de $\mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ si D est une cellule de classe $\mathcal{C}^k$ et f (ou g et h) sont de classe $\mathcal{C}^k$.

On définit de la même manière les cellules analytiques.

Remarque 1.2.10. — Une cellule dans $\mathbb{R}^n$ est une cellule de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement est analytique) si et seulement si c'est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ (*resp.* c'est une sous-variété analytique de $\mathbb{R}^n$).

Théorème 1.2.11 **([7],Chapitre 7, Théorème 3.2.)**

Considérons une expansion o-minimale du corps ordonné des réels.

Soit k *un entier et* $A_1, \ldots, A_m$ *une famille finie de sous-ensembles définissables de* $\mathbb{R}^n$*.*

Il existe alors une décomposition cellulaire de $\mathbb{R}^n$ *en cellules de classe* $\mathcal{C}^k$ *pour laquelle chaque* A_i *est réunion de cellules*(2)*.*

Le théorème de décomposition cellulaire a de nombreuses applications.

Corollaire 1.2.12 **(théorème de la borne uniforme)**

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *un ensemble définissable.*

(2)à ce jour, on ne sait pas si les expansions o-minimales de $\mathcal{SA}$ admettent toutes un théorème de décomposition cellulaire en cellules de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Il existe un entier N tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, le nombre de composantes connexes de $A_x = \{y \in \mathbb{R}^n \,;(x,y) \in A\}$ est majoré par N.

En particulier, pour $m = 0$, le nombre de composantes connexes d'un ensemble définissable est fini.

***Corollaire 1.2.13* (lemme du choix définissable : [7], chapitre 6, Proposition 1.2.)**

Considérons une expansion o-minimale de $\mathcal{SA}$.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable tel que $A_x = \{y \in \mathbb{R}^n \,;(x,y) \in A\} \neq \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.

Alors il existe une application définissable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) \in A_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$.

1.3. Corps de Hardy

Définition 1.3.1. — Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de germes en $+\infty$ de fonctions d'une seule variable, définies chacune sur un voisinage de $+\infty$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction d'une variable définie sur un voisinage de $+\infty$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\widetilde{f}$ son germe en l'infini.

On dit que $\mathcal{H}$ forme un corps de germes à l'infini si $\mathcal{H}$ contient les germes des fonctions constantes égales à 0 et à 1 et est stable par les opérations $\widetilde{f} \to \widetilde{-f}$, $(\widetilde{f},\widetilde{g}) \to \widetilde{f+g}$, $\widetilde{f} \to \widetilde{1/f}$ pour f non constante égale à 0 au voisinage de $+\infty$ et $(\widetilde{f},\widetilde{g}) \to \widetilde{f \cdot g}$.

En particulier, la stabilité par l'opération $\widetilde{f} \to \widetilde{1/f}$ impose qu'une fonction continue dans un corps de germes à l'infini n'oscille pas : elle prend, dans un voisinage de $+\infty$, ses valeurs dans un et un seul des ensembles $\{0\}$, $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

Il est alors possible de mettre un ordre sur chaque corps de germes à l'infini de fonctions continues : on pose $\widetilde{f} \leq \widetilde{g}$ si $g-f$ prend ultimement ses valeurs dans $[0,+\infty[$.

Définition 1.3.2. — On dit qu'un corps de germes à l'infini $\mathcal{H}$ forme un corps de Hardy si les éléments de $\mathcal{H}$ sont les germes de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de $+\infty$ et si $\mathcal{H}$ est stable par l'opération de dérivation $\widetilde{f} \to \widetilde{f'}$.

Remarque 1.3.3. — Soit $\mathcal{A}$ une expansion o-minimale de $\mathcal{SA}$ (le corps ordonné des réels).

Il est alors clair que l'ensemble $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ des germes en $+\infty$ des fonctions définissables dans $\mathcal{A}$ forme un corps de Hardy.

En particulier si $\mathcal{A}'$ est une structure définissant les même ensembles dans $\mathbb{R}^2$ qu'une expansion o-minimale du corps ordonné des réels alors $\mathcal{H}(\mathcal{A}')$ l'ensemble des germes en $+\infty$ des fonctions définissables dans $\mathcal{A}'$ forme un corps de Hardy.

Dans la suite de cette section, nous ne considérons que des expansions de $(\mathbb{R}; <)$, qui sont o-minimales et dont l'ensemble des germes en l'infini forme un corps de Hardy.

Lemme 1.3.4. — *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux telles expansions o-minimales de $(\mathbb{R}; <)$.*

Supposons de plus que pour chaque paire d'intervalles ouverts non vides I et J, il existe une bijection croissante (respectivement décroissante) de I dans J qui soit à la fois définissable dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{B}$ (condition d'isotropie en paire).

Alors $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{B})$ si et seulement si les ensembles de $\mathbb{R}^2$ qui sont définissables dans $\mathcal{A}$ sont exactement ceux sont définissables dans $\mathcal{B}$.

Preuve. — Supposons $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{B})$.

Par le théorème de décomposition cellulaire, il suffit de prouver, pour chaque intervalle I ouvert, que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une application alors les conditions

1. f est définissable dans $\mathcal{A}$
2. f est définissable dans $\mathcal{B}$

sont équivalentes.

Fixons une telle application $f : I \to \mathbb{R}$ définissable dans $\mathcal{A}$. Prouvons qu'elle est définissable dans $\mathcal{B}$.

On peut envoyer tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ bijectivement, de manière croissante ou décroissante, sur l'intervalle $]0, 1[$ par une application ϕ à la fois définissable dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{B}$. On se ramène ainsi au cas où $I =]0, 1[$.

Soit $x \in]0,1]$ et $\eta > 0$ tel que $]x-\eta, x[\subseteq]0,1[$. Prouvons qu'il existe un $0 < \varepsilon < \eta$ tel que la restriction de f à $]x-\varepsilon, x[$ est définissable dans $\mathcal{B}$ (nous nommerons cette propriété la *définissabilité de f dans $\mathcal{B}$ à gauche en x*).

Comme précédemment, il existe une bijection croissante $\phi :]0,\infty[\to]x-\eta, x[$ qui est à la fois définissable dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{B}$. Comme $H(\mathcal{A}) = H(\mathcal{B})$, il existe un $m \leq 0$ telle que la restriction de $f \circ \phi$ à $J =]m, \infty[$ est définissable dans $\mathcal{B}$. Mais alors l'application de $]\phi(m), x[$ dans $\mathbb{R}$

$$\big((f \circ \phi)|_J\big) \circ \big(\phi^{-1}|_{\phi(J)}\big)$$

est définissable dans $\mathcal{B}$.

En particulier, par définissabilité dans $\mathcal{B}$ à gauche en 1, l'ensemble T des $t \in]0,1[$ pour lesquels $f|_{]t,1[}$ est définissable dans $\mathcal{B}$ est non vide.

Soit $\tau := \inf T$.

Prouvons que $\tau = 0$.

Remarquons que τ est un minimum. Soit en effet ψ une bijection décroissante de $]0,1[$ dans $]0,1[$ à la fois définissable dans $\mathcal{A}$ et dans $\mathcal{B}$. En appliquant la définissabilité dans $\mathcal{B}$ à gauche en $\psi(\tau)$ de la fonction $f \circ \psi^{-1}$, on prouve qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de f à $]\tau, \tau+\varepsilon[$ est définissable dans $\mathcal{B}$; mais par définition de τ, la restriction de f à $]\tau+\varepsilon, 1[$ est elle aussi définissable dans $\mathcal{B}$.

Si, par l'absurde, $\tau \neq 0$, la définissabilité dans $\mathcal{B}$ de f à gauche en τ et la définissabilité dans $\mathcal{B}$ de f sur $]\tau, 1[$ contredisent alors la définition de τ. □

Remarque 1.3.5. — Soit a et b deux réels avec $a < b$.

– L'application $x \mapsto -x$ envoie bijectivement $]a,b[$ sur $]-b,-a[$ de manière décroissante.
– L'application

$$x \mapsto \frac{(b-a)^2}{(b-a)^2 - (x-a)^2}$$

envoie bijectivement $]a,b[$ sur $]1,+\infty[$ de manière croissante.

En particulier, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définissent les fonctions semi-algébriques d'une seule variable, elles sont isotropes en paire.

La connaissance du corps de Hardy d'une expansion o-minimale de du corps des réels donne beaucoup d'information sur la structure ; rappelons le théorème de dichotomie :

Définition 1.3.6. — On dit qu'une expansion o-minimale du corps ordonné des réels est polynomialement bornée si pour toute application définissable f d'un voisinage de l'infini dans $\mathbb{R}$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x)| < x^n$ quand x est assez grand.

Théorème 1.3.7 (**[21]**). — *Considérons $\mathcal{A}$ une expansion o-minimale du corps ordonné des réels $\mathcal{SA}$.*

Alors

– *ou bien $\mathcal{A}$ est polynomialement bornée,*

– *ou bien la fonction exponentielle est définissable dans $\mathcal{A}$.*

Définition 1.3.8. — Soit $\mathcal{H}$ un corps de Hardy ; on note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des germes dans $\mathcal{H}$ qui tendent vers $+\infty$.

On dit que deux éléments $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ de $\mathcal{H}^+$ sont comparables si il existe des entiers N et M tels que $\widetilde{f} \leq \widetilde{g^N}$ et $\widetilde{g} \leq \widetilde{f^M}$ (où g^N et f^M désignent les fonctions $x \mapsto (g(x))^N$ et $x \mapsto (f(x))^M$).

Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathcal{H}^+$; le rang de $\mathcal{H}$ est le nombre des classes d'équivalences de $\mathcal{H}^+$.

La stabilité par composition des fonctions définissables dans une structure o-minimale assure que tous les corps de Hardy ne sont pas des corps des germes en l'infini d'une expansion o-minimale du corps ordonné des réels :

Proposition 1.3.9. — *Le corps des germes à l'infini d'une expansion o-minimale du corps ordonné des réels est de rang* 1 *ou de rang infini.*

Démonstration. — Si la structure n'est pas polynomialement bornée, le théorème de dichotomie nous assure qu'elle définit l'exponentielle ainsi que ses composées n-ième pour chaque n ; mais celles-ci ne sont pas deux à deux comparables.

Si la structure est polynomialement bornée, pour chaque f définissable tendant vers $+\infty$ on a d'une part un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \leq x^n$ pour n assez grand. Par ailleurs, f envoie un voisinage de $+\infty$ vers un voisinage de $+\infty$; par o-minimalité, on peut choisir ces voisinages pour que f y soit une bijection. Soit g sa réciproque. Il existe alors un entier m pour lequel on a $g(x) \leq x^m$ pour x assez grand. Par croissance de $x \mapsto x^m$ et de f au voisinage de $+\infty$ on a donc $x \leq (f(x))^m$ pour x assez grand. $\square$

Il est facile de construire des corps de Hardy de rang quelconque : si e_k désigne la composée $k$ième de l'exponentielle, le corps $\mathbb{R}(e_1, \ldots, e_n)$ engendré par $\mathbb{R}$ et les $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un corps de Hardy de rang(exactement) n.

Ce corps de Hardy n'est donc pas le corps des germes d'une expansion o-minimale du corps ordonné des réels.

L'objet des chapitres suivants est d'étudier l'injectivité de la fonction (partielle) qui à une structure o-minimale $\mathcal{A}$ associe $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, le corps de Hardy des germes en $+\infty$ des fonctions d'une variable définissables dans $\mathcal{A}$.

Nous allons essayer de décrire l'image réciproque de $\mathcal{H}(\mathcal{SA})$, où $\mathcal{SA}$ est le corps ordonné des réels.

CHAPITRE 2

LA STRUCTURE DES COURBES SEMI-ALGÉBRIQUES.

Nous prouvons que la structure où est nommée chaque relation d'appartenance à un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^2$ élimine ses quanteurs. Nous en déduisons qu'elle ne sait pas définir certains ensembles semi-algébriques.

En particulier, cela nous fournit un couple de structures o-minimales distinctes (dont l'une n'est pas une extension du corps ordonné des réels) ayant le même corps des germes à l'infini de fonctions définissables.

2.1. Théorème de Tarski et polynômes à deux variables

Définition 2.1.1. — Soit $\mathcal{D}$ la collection des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ semi-algébriques.

On appelle la structure $\mathcal{CSA} = (\mathbb{R}\,;\emptyset, \mathcal{D}, \emptyset)$ la *structure des courbes semi-algébrique.*

Remarque 2.1.2. — Il est clair que la structure $\mathcal{CSA}$ est une expansion o-minimale de $(\mathbb{R}; <)$.

Par ailleurs, le théorème de Tarski-Seidenberg (exemple 1.1.10) assure que les ensembles définissables par une formule sans quantificateur sont exactement les combinaisons booléennes positives finies d'ensembles de la forme

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P(x_i, x_j) = 0\}$$

et de la forme

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; P(x_i, x_j) > 0\}$$

où les P sont des polynômes réels à deux variables et les couples (i, j) appartiennent à $\{1, \ldots, n\}^2$.

On appelle ces ensembles *ensembles semi-2-algébriques* ; ce sont en particulier des ensembles semi-algébriques.

Proposition 2.1.3. — *La structure $\mathcal{CSA}$ élimine ses quantificateurs.*

Démonstration. — Considérons un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^{n+1}$, combinaison booléenne positive d'ensembles de la forme

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_i, x_j) \in A'\},$$

où les ensembles A' sont des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ et (i, j) parcourt $\{1, \cdots, n+1\}^2$.

Soit $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ la projection cartésienne donnée par

$$\pi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Il suffit de prouver que $\pi(A)$ est lui aussi une combinaison booléenne d'ensembles de la forme

$$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_i, x_j) \in A'\},$$

où les ensembles A' sont des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ et (i, j) parcourt $\{1, \cdots, n\}^2$.

On peut d'abord réécrire la combinaison booléenne décrivant A sous forme normale disjonctive. L'indentité $\pi(X \cup Y) = \pi(X) \cup \pi(Y)$ permet alors de se ramener au cas où A est une intersection finie d'ensembles de la forme

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; (x_i, x_j) \in A'\},$$

où les ensembles A' sont des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ et (i, j) parcourt $\{1, \cdots, n\}^2$.

La collection des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ formant une algèbre de Boole, il suffit alors de prouver le résultat pour A de la forme

$$A = \bigcap_{1 \leq i \leq j \leq n+1} \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_i, x_j) \in A_{ij}\},$$

où les A_{ij} sont des ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$.

Par ailleurs cette projection $\pi(A)$ est l'intersection de l'ensemble

$$\bigcap_{1\leq i,j\leq n}\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;(x_i,x_j)\in A_{ij}\}$$

et de l'ensemble

$$\pi(\bigcap_{1\leq i\leq n}\{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1};(x_i,x_{n+1})\in A_{i,n+1}\})$$

Il nous suffit donc de prouver que la projection d'un ensemble de la forme

$$\bigcap_{1\leq i\leq n}\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1};(x_i,y)\in A_i\},$$

où les A_i sont des ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$, est elle-même une union finie d'ensembles de la forme

$$\bigcap_{1\leq i,j\leq n}\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n;(x_i,x_j)\in B_{ij}\},$$

où les B_{ij} sont des ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$.

Quitte à effectuer une décomposition cellulaire et à invoquer à nouveau les arguments ensemblistes qui précèdent, on peut même se ramener au cas où les A_i sont des cellules (définition 1.2.2).

En particulier, la fibre de la projection $(x,y)\mapsto x$ de A_i au dessus du réel x est ou bien un intervalle ouvert (éventuellement vide) ou bien réduite à un point ; notons cette fibre A_i^x.

Remarquons alors la propriété suivante :

Lemme 2.1.4. — *Soit X_1, …,X_r des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, chacun d'eux étant ou bien un intervalle ouvert ou bien un point.*

On a l'équivalence entre les conditions suivantes :

(a) $\bigcap_{j=1}^r X_j\neq\emptyset$

(b) $\forall(i,j)\in\{1,\ldots,r\}^2,\ X_i\cap X_j\neq\emptyset$

Le projeté de

$$\bigcap_{1\leq i\leq n}\{(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1};(x_i,y)\in A_i\}$$

est l'ensemble

$$\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1};\bigcap_i A_i^{x_i}\neq\emptyset\}.$$

Par le lemme 2.1.4, c'est aussi l'ensemble

$$\bigcap_{1\leq i,j\leq n} \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}; A_i^{x_i}\cap A_j^{x_j}\neq\emptyset\};$$

Mais chaque ensemble $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}; A_i^{x_i}\cap A_j^{x_j}\neq\emptyset\}$ peut s'écrire sous la forme $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}; (x_i,x_j)\in B_{ij}\}$ où

$$B_{ij} := \{(x_i,x_j)\in\mathbb{R}^2; \exists y\in\mathbb{R}, (x_i,y)\in A_i \wedge (x_j,y)\in A_j\}$$

est un ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^2$. □

Définition 2.1.5. — Soit $\mathcal{M} := (M;\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ une structure.

1. On dit qu'un sous-ensemble A de M^n définissable dans $\mathcal{M}$ est binaire s'il s'écrit comme combinaison booléenne d'ensembles de la forme

$$\{(x_1,\ldots,x_n)\in M^n; (x_i,x_j)\in A\}$$

   où A désigne un ensemble définissable de M^2.

2. On dit que $\mathcal{M}$ est binaire si tous les ensembles qu'elle définit (quelle que soit l'arité) sont des ensembles binaires.
3. On dit que $\mathcal{M}$ est fortement binaire si les relations nommées sont toutes d'arité 2 et que les fonctions nommées sont toutes d'arité 1.

On prouve de la même manière que la proposition 2.1.3 la proposition :

Proposition 2.1.6. — *Soit $\mathcal{S}$ une expansion o-minimale de* $(\mathbb{R};<)$.

Supposons que $\mathcal{S}$ est binaire et que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définissables dans $\mathcal{S}$ le sont sans quantificateur.

Alors $\mathcal{S}$ élimine ses quantificateurs.

Corollaire 2.1.7. — *Si une expansion o-minimale $\mathcal{S}$ de* $(\mathbb{R};<)$ *est fortement binaire alors elle est binaire.*

En effet, l'expansion $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$, qui nomme toutes les relations d'appartenance à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ définissable dans $\mathcal{S}$ et elles seules, définit les mêmes ensembles que $\mathcal{S}$ tandis que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définissables dans $\mathcal{S}'$ le sont sans quantificateurs.

Remarque 2.1.8. — On aurait pu essayer d'appliquer directement un algorithme de projection issu de la preuve classique du théorème de Tarski (comme celui présenté dans le chapitre 1 de [**5**]) pour prouver que le projeté d'un ensemble semi-2-algébrique est aussi un ensemble semi-2-algébrique.

Mais ces algorithmes tendent à « mélanger » les variables (une des étapes de réduction consiste à remplacer une conjonction d'égalité polynomiale $\bigwedge_{i=1}^m P_i(x) = 0$ par l'égalité $\sum_{i=1}^m P_i(x)^2 = 0$) tandis que nous ne connaissons pas d'algorithme permettant de reconnaître si une combinaison booléenne d'ensembles définis par des inégalités polynomiales peut s'écrire comme une combinaison booléenne d'inégalités polynomiales dont chaque polynome ne dépend que de 2 variables.

2.2. La structure des courbes semi-algébriques est triviale

Corollaire 2.2.1. — *Il existe des ensembles semi-algébriques qui ne sont pas définissables dans la structure des courbes semi-algébriques.*

Démonstration. — Prouvons par exemple[1] que cette structure ne définit pas le graphe de l'addition Γ.

Supposons par l'absurde que cette structure définisse Γ ; Γ s'écrit alors comme union finie d'ensembles de la forme

$$\Theta := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in Z, (x, z) \in Y, (y, z) \in X\},$$

où les ensembles X, Y et Z sont des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$; quitte à utiliser le théorème 1.2.11 pour effectuer des décompositions cellulaire $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ adaptée aux ensembles X, Y et Z, on peut supposer que chacun des ensembles X, Y et Z intervenant sont des cellules $\mathcal{C}^1$.

Vu comme ensemble semi-algébrique, Γ est une cellule de dimension 2. L'un au moins des ensembles Θ est donc de dimension 2 quand on le considère comme ensemble semi-algébrique.

Il existe donc un point $(x, y, z) \in \Gamma$ au voisinage duquel Γ est l'intersection des germes d'ensembles $\widetilde{Z} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; (x, y) \in Z\}$,

[1] Plus généralement, cette structure ne définit aucune fonction de deux variables strictement croissante en chacune de ses variables ; on dit suivant [**28**] qu'une telle structure est *triviale*.

$\widetilde{Y} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, z) \in Y\}$ et $\widetilde{X} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in X\}$ où X, Y et Z sont trois cellules semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$.

L'un, au moins, des ensembles $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ ou $\widetilde{Z}$ est alors de dimension ≤ 2, et tous sont de dimension ≥ 1. Par ailleurs, si deux d'entre eux ont dimension ≤ 2, leurs intersections étant transverses (comme variété $\mathcal{C}^1$), le germe de Γ serait de dimension ≤ 1 (comme variété $\mathcal{C}^1$).

Le germe de Γ coïncide donc avec l'un des germes de $\widetilde{X}$, de $\widetilde{Y}$ ou de $\widetilde{Z}$. Supposons par exemple que ce soit le germe de $\widetilde{Z}$. On aurait alors $(x_0, y_0, z) \in \Gamma$ pour tout z d'un voisinage de z_0. C'est absurde.

$\square$

On prouve de manière identique à l'aide de la Proposition 2.1.6 :

Corollaire 2.2.2. — *Soit $\mathcal{T}$ une expansion non triviale de* $(\mathbb{R}; <)$. *Il existe alors $\mathcal{S}$ une expansion (triviale) de* $(\mathbb{R}; <)$ *telle que les germes en l'infini des fonctions définissables dans $\mathcal{S}$ soient exactement les germes en l'infini des fonctions définissables dans $\mathcal{T}$ et pour laquelle $\langle \mathcal{T} \rangle \neq \langle \mathcal{S} \rangle$.*

CHAPITRE 3

RIEN QUE DES ENSEMBLES SEMI-ALGÉBRIQUES

Nous prouvons que si n est un entier ≥ 2 et qu'on considère une expansion (o-minimale) de $(\mathbb{R}; <)$ qui [1]

– admet un théorème de décomposition $\mathcal{C}^\infty$ et
– dont les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}^n$ sont tous des ensembles semi-algébriques,

alors cette structure ne définit que des ensembles semi-algébriques et ce en toute arité : on peut reconnaître une structure o-minimale qui définit des ensembles non semi-algébriques dès la dimension 2.

3.1. Décomposition cellulaire

Théorème 3.1.1. — *Soit $\mathcal{S}$ une expansion de $(\mathbb{R}; <)$ qui*

– *admet un théorème de décomposition $\mathcal{C}^\infty$ (définition 1.2.9) et*
– *dont les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}^2$ sont tous des ensembles semi-algébriques.*

alors les ensembles définissables dans $\mathcal{S}$ (et ce quelque soit leur arité) sont tous semi-algébriques.

Fixons $\mathcal{S}$ une telle structure o-minimale.

On va prouver par récurrence sur n que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ définissable dans $\mathcal{S}$ est semi-algébrique.

[1] L'hypothèse d'existence d'un théorème de décomposition $\mathcal{C}^\infty$ est quelque peu artificielle ; rappelons toutefois qu'à ce jour, toutes les expansions o-minimales de $(\mathbb{R}; <)$ connues vérifient cette hypothèse.

Pour $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est clair.

Supposons le résultat prouvé pour $n \geq 2$; pour prouver que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^{n+1}$ définissables dans $\mathcal{S}$ sont tous semi-algébriques, il suffit, par l'hypothèse d'existence de décompositions cellulaires $\mathcal{C}^\infty$, de prouver que les cellules $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont semi-algébriques.

Par ailleurs, si on a prouvé que les cellules $\mathcal{C}^\infty$ qui sont des graphes sont semi-algébriques, on peut en déduire immédiatement la semi-algébricité des cellules $\mathcal{C}^\infty$ qui sont des bandes.

Enfin, dans le cas où la cellule est un graphe $\Gamma_D(f)$, c'est le graphe de la restriction à D d'une fonction $F : U \to \mathbb{R}$ définissable dans $\mathcal{S}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ où U est un ouvert définissable.

Les composantes connexes d'un ensemble définissable étant définissable et en nombre fini, on peut même se restreindre au cas où U est connexe.

Proposition 3.1.2. — *Soit $n \geq 2$ et $\mathcal{S}$ une expansion o-minimale du corps des réels dans laquelle tous les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}^n$ sont semi-algébriques.*

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ semi-algébrique et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ définissable dans $\mathcal{S}$ alors la fonction f est une fonction semi-algébrique[2]*.*

Nous donnerons la preuve de cette proposition dans le paragraphe 3.3.

3.2. Fonctions de Nash

Rappelons quelques résultats classiques concernant les fonctions semi-algébriques.

Définition 3.2.1. — Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert semi-algébrique. On dit qu'une application f de U dans $\mathbb{R}$ est une fonction de Nash si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et le graphe de f est un ensemble semi-algébrique.

---

(2) Il est prouvé dans [**3**] pp 199-203 qu'une fonction analytique qui est algébrique en chacune de ses variables est algébrique ; la preuve que nous donnons est calquée sur cette preuve.

Définition 3.2.2. — Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$; on dit qu'une application f de U dans $\mathbb{R}$ est algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y]$ non nul tel que

$$\forall \overline{x} \in U, P(\overline{x}, f(\overline{x})) = 0.$$

On définit la *complexité* de f comme étant le plus petit entier n pour lequel on peut choisir un tel polynôme de degré total n. On la note $H(f)$.

Proposition 3.2.3. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application f de U dans $\mathbb{R}$.*

Si f est semi-algébrique alors f est algébrique.

Démonstration. — Considérons une telle application $f : U \to \mathbb{R}$.

Par le théorème 1.1.10, le graphe de f est de la forme

$$\bigcup_{i=1}^{l} \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; P_i(x, y) = 0, Q_{1i}(x, y) > 0, \dots, Q_{m_i i}(x, y) > 0\},$$

où les P_i et Q_{ij} sont des éléments de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y]$ et chaque ensemble dans l'union est non vide.

Les P_i sont tous non nuls le graphe de f est d'intérieur vide ; le polynôme $P = \prod_{i=1}^{l} P_i$ est alors un polynôme non nul qui s'annule sur le graphe de f. $\square$

Remarque 3.2.4. — Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ algébrique n'est pas en général semi-algébrique ; ainsi le polynôme $P(x, y) = y^2 - y$ s'annule sur le graphe de $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ (la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$), fonction qui n'est clairement pas semi-algébrique.

Toutefois, le théorème des fonctions implicites pour les fonctions analytiques donne les équivalences :

***Théorème 3.2.5* ([2], chapitre 9)**. — *Soit f une application de U un ouvert connexe semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Il y a équivalence entre les propriétés :

1. *f est une fonction de Nash*
2. *f est algébrique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U*
3. *f est algébrique et analytique sur U.*

On peut aussi préciser le théorème de décomposition cellulaire :

***Théorème 3.2.6* ([2] , chapitre 9)**. — *Soit* $A_1, \dots, A_k$ *une collection finie de sous-ensembles de* $\mathbb{R}^n$ *définissables dans la structure du corps ordonné des réels.*

Alors il existe une décomposition cellulaire de classe $\mathcal{C}^\infty$ *de* $\mathbb{R}^n$ *adaptée aux* A_i*.*

3.3. Algébricité séparée

Dans ce paragraphe, nous prouvons la proposition 3.1.2.

Soit $n \geq 2$ et $\mathcal{S}$ une expansion o-minimale du corps des réels dans laquelle tous les sous-ensembles définissables de $\mathbb{R}^n$ sont semi-algébriques et f est une application d'un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et définissable dans $\mathcal{S}$.

• On va d'abord prouver qu'il existe un ouvert $U' \subseteq U$ tel que la restriction de f à U' est semi-algébrique.

Soit B un ouvert dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et I un intervalle ouvert non vide tel que $B \times I \subseteq U$.

Pour chaque $x \in B$, l'application $f_x : I \to \mathbb{R}$ qui à $y \in I$ associe $f(x, y)$ est une application définissable dans $\mathcal{S}$.

De même, pour chaque $y \in I$, l'application $f_y : B \to \mathbb{R}$ qui à $x \in B$ associe $f(x, y)$ est une application définissable dans $\mathcal{S}$.

Par l'hypothèse sur les ensembles d'arité $\leq n$, chacune de ces application est donc semi-algébrique.

On s'est ainsi ramené à prouver la proposition :

Proposition 3.3.1. — *Soit* B *un ouvert connexe non vide de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *semi-algébrique,* I *un intervalle ouvert non vide et* $f : B \times I \to \mathbb{R}$ *une application telle que*

1. $\forall x \in B$ *chaque application* $f_x : I \to \mathbb{R}$ *donnée par* $f_x(y) = f(x, y)$ *est semi-algébrique et*
2. $\forall y \in I$ *chaque application* $f_y : B \to \mathbb{R}$ *donnée par* $f_y(x) = f(x, y)$ *est semi-algébrique*

alors il existe un ouvert $U' \subseteq B \times I$ *tel que la fonction* $f|_{U'}$ *est une fonction semi-algébrique.*

Démonstration. — Par la proposition 3.2.3, chaque f_x est algébrique.

Prouvons qu'il existe un entier d tel que $\{x \in B; H(f_x) \leq d\}$ est d'intérieur non vide.

Pour chaque $d \in \mathbb{N}$, posons $B(d)$ l'ensemble des $x \in B$ pour lesquels la complexité $H(f_x)$ est $\leq d$.

$B(d)$ est aussi l'ensemble des $x \in B$ pour lesquels il existe un point $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{0,\ldots,d\}^2} \in \mathbb{R}^{(d+1)^2}$ tel que

$$\sum_{0\leq i,j\leq d} {a_{i,j}}^2 = 1$$

et

$$\forall y \in I, \sum_{0\leq i,j\leq d} a_{i,j} y^i (f_x(y))^j = 0.$$

Prouvons que chaque ensemble $B(d)$ est fermé dans B.

Fixons donc un $d \in \mathbb{N}$; soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $B(d)$ convergeant vers un point $x \in B$; prouvons que $x \in B(d)$.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a un point $(a^k_{i,j})_{(i,j)\in\{0,\ldots,d\}^2}$ de la sphère unité $S^{d(d+1)}$ de $\mathbb{R}^{(d+1)^2}$ tel que

$$\forall y \in I, \sum_{0\leq i,j\leq d} a^k_{i,j} y^i (f(x_k, y))^j = 0.$$

Par compacité de $S^{d(d+1)}$ et quitte à passer à une sous-suite, il existe un point $(a_{i,j})_{0\leq i,j\leq d}$ de $S^{d(d+1)}$, tel que pour tout $(i,j) \in \{0,\ldots,d\}^2$, la suite $(a^k_{i,j})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $a_{i,j}$.

Fixons $y \in I$. Par continuité de $x \mapsto f(x,y)$, on a

$$\sum_{0\leq i,j\leq d} a_{i,j} y^i f(x,y)^j = 0.$$

Le point y ayant été choisi de manière arbitraire, x est bien un point de $B(d)$: l'ensemble $B(d)$ est donc fermé.

Par ailleurs $I \to \mathbb{R}, y \mapsto f(x,y)$ est algébrique pour tout $x \in B$ d'où

$$B = \bigcup_{d\in\mathbb{N}} B(d).$$

Les $B(d)$ étant fermés, le théorème de Baire nous donne alors un d_0 tel que $B(d_0)$ est d'intérieur non vide.

Quitte à restreindre B, on s'est ainsi ramené au cas où

$$\forall x \in B, \exists (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq d} \in S^{d(d+1)}, \, \forall y \in I, \sum_{0 \leq i,j \leq d} a_{i,j} y^i f(x,y)^j = 0.$$

Il existe donc une application $a : B \mapsto S^{d(d+1)}, x \mapsto (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq d}$ telle que

$$\forall x \in B, \forall y \in I, \sum a_{ij}(x) y^i f(x,y)^j = 0.$$

Montrons qu'on peut se ramener au cas où l'application a est semi-algébrique[(3)].

Posons $N := (d+1)^2$ et $l \mapsto (i(l), j(l))$ une bijection entre $\{1, \ldots, N\}$ et $\{0, \ldots, d\}^2$.

Pour chaque $l \in \{1, \ldots, N\}$, considérons l'application $V_l : B^N \times I \to \mathbb{R}^N$ donnée par

$$V_l(x_1, \ldots, x_N, y) = (y^{i(l)} f(x_1, y)^{j(l)}, \ldots, y^{i(l)} f(x_N, y)^{j(l)}).$$

L'égalité précédente assure que pour tout $(x_1, \ldots, x_N) \in B^N$ et tout $y \in I$ les N vecteurs $V_l(x_1, \ldots, x_N, y)$ (où l parcourt $\{1, \ldots, N\}$) sont liés.

Quelque soit $(x_1, \ldots, x_N, y) \in B^N \times I$, le déterminant de la matrice $M(x_1, \ldots, x_N, y) := \left(y^{i(l)} f(x_k, y)^{j(l)}\right)_{1 \leq k,l \leq N}$ est donc nul.

Chaque matrice mineure de taille K de cette matrices apparaît naturellement comme une application de $B^K \times I$.

Soit $M'(x_1, \ldots, x_{N'}, y)$ une mineure minimale (pour la relation d'ordre $A \preceq B$ si A est une mineure de B) parmi les mineures A pour lesquelles l'application $(x_1, \ldots, x_K, y) \mapsto \det A(x_1, \ldots, x_K, y)$ est la fonction nulle.

(3) Si la structure $\mathcal{S}$ est une expansion de $\mathcal{SA}$, l'ensemble

$$\{(x, y, a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{(d+1)^2} ; x \in B, y \in I, \sum a_{ij} y^i f(x,y)^j = 0 \ , \prod a_{ij} \neq 0\}$$

est définissable dans la structure $\mathcal{S}$; cette structure admettant le lemme du choix définissable, on peut alors choisir l'application a pour qu'elle soit définissable dans $\mathcal{S}$; si, comme dans la proposition 3.1.2, on a supposé que les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ définissables dans $\mathcal{S}$ sont semi-algébriques, on a immédiatement la semi-algébricité de a.

En développant le déterminant de M' par rapport à la dernière colonne, on obtient l'égalité

$$\forall(x_1,\ldots,x_{N'},y)\in B^{N'}\times I,\sum_{l=1}^{N'}C_l(x_1,\ldots,x_{N'-1},y)y^{i(l)}f(x_{N'},y)^{j(l)}=0,$$

où chaque C_l est le déterminant d'une mineure de M'.

Par minimalité de M', il existe $l_0\in\{1,\ldots,N'\}$, $(a_1,\ldots,a_{N'-1})\in B^{N'-1}$ et $y_0\in I$ tel que $C_{l_0}(a_1,\ldots,a_{N'-1},y_0)\neq 0$.

Posons $a_{ij}(y)=C_l(a_1,\ldots,a_{N'-1},y)$ pour chaque i, j et l tels que $(i,j)=(i(l),j(l))$.

Chaque a_{ij} est alors semi-algébrique et continue comme polynôme en les $y^if(a_k,y)^j$ et, quitte à restreindre I à un voisinage de y_0, on peut supposer que $\forall y\in I,a_{i_0j_0}(y)\neq 0$, où $(i_0,j_0)=(i(l_0),j(l_0))$.

Le graphe de f est donc inclus dans l'ensemble semi-algébrique

$$S=\{(x,y,z)\in B\times I\times\mathbb{R}\,;\sum_{0\leq i,j\leq d}a_{ij}(x)y^iz^j=0\}.$$

Comme, pour chaque x, les $a_{ij}(x)$ sont non tous nuls, on peut, quitte à restreindre B et I, supposer que $\forall(x,y)\in B\times I$, le polynôme

$$\sum_{0\leq j\leq d}(\sum_{0\leq i\leq d}a_{ij}(x)y^i)Z^j=0$$

est non nul.

On s'est ainsi ramené au cas où les fibres de S pour la projection $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};(x,y,z)\mapsto(x,y)$ sont de cardinal fini.

Effectuons alors une décomposition cellulaire $\mathcal{C}^0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ adaptée à S.

Il existe alors une cellule ouverte semi-algébrique $U'\subseteq B\times I$ tel que $S\cap U'\times\mathbb{R}$ est union de graphe d'applications de semi-algébriques continues $h_1,\ldots,h_m:U'\to\mathbb{R}$ et telles que $h_1<\ldots<h_m$ sur U'.

Par continuité, la restriction de f à U' est alors l'une des fonctions h_i.

La restriction de f à l'ouvert semi-algébrique U' est donc bien semi-algébrique. □

• Il reste à prouver que l'application f (non restreinte) est semi-algébrique.

Par la proposition 3.3.1 et 3.2.3, il existe un polynôme non nul P et un ouvert semi-algébrique connexe $U'\subseteq U$ tel que $\forall w\in U',P(w,f(w))=0$.

Prouvons que

$$\forall w \in U, P(w, f(w)) = 0.$$

Soit z et z' deux points de U. On note $[z, z']$ le segment d'extrémité z et z'.

Si $J := [z, z'] \subseteq U$ alors l'application $]0,1[\to \mathbb{R}; t \mapsto f(t \cdot z + (1-t) \cdot z')$ est, par hypothèse de récurrence, semi-algébrique. Mais cette application est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il s'agit donc, par le théorème 3.2.5, d'une application analytique.

Notons alors R la relation sur U donnée par

$$z \, R \, z' \Leftrightarrow [z, z'] \subseteq U.$$

Si $z \, R \, z'$, il existe un voisinage W de z' tel que $\forall w \in W, z \, R \, w$.

Par ailleurs, si $w \mapsto P(w, f(w))$ est nulle au voisinage de z et que $z \, R \, z'$ alors l'application $]0,1[\to \mathbb{R}; t \mapsto P(t \cdot z + (1-t) \cdot z', f(t \cdot z + (1-t) \cdot z'))$ est nulle à droite de 0 donc, par analycité, nulle sur $]0,1[$. Par continuité, on a donc $P(z', f(z')) = 0$.

Par récurrence sur N, si $z_i \, R \, z_{i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, N-1\}$ et $w \mapsto P(w, f(w))$ est nulle au voisinage de z_1, on prouve ainsi que la fonction $w \mapsto P(w, f(w))$ est nulle au voisinage de z_N.

Par connexité de U, on obtient

$$\forall w \in U, P(w, f(w)) = 0.$$

f est donc algébrique.

f étant par ailleurs de classe $\mathcal{C}^\infty$, le théorème 3.2.5 assure alors que f est semi-algébrique.

CHAPITRE 4

TOUS LES ENSEMBLES SEMI-ALGÉBRIQUES

L'objet de ce chapitre est d'achever la caractérisation des expansions $\mathcal{S}$ de la structure $\mathcal{CSA}$ pour lesquelles $\langle S \rangle_2 = \langle \mathcal{SA} \rangle_2$.

Nous allons prouver que $\mathcal{CSA}$ et $\mathcal{SA}$ sont les *uniques* structures $\mathcal{S}$ satisfaisant cette propriété et admettant un théorème de décomposition cellulaire $\mathcal{C}^\infty$.

Le chapitre 3 nous assure qu'une structure satisfaisant ces propriétés est une réduite de la structure $\mathcal{SA}$; on s'est ainsi ramené à prouver que si $\mathcal{S}$ est une expansion stricte de $\mathcal{CSA}$ et $\mathcal{S}$ est un réduit de $\mathcal{SA}$ alors $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{SA} \rangle$.

4.1. Ne pas être trivial

Lemme 4.1.1. — *Soit $\mathcal{S}$ une expansion de $(\mathbb{R};<)$ qui n'est pas binaire (définition 2.1.5) alors* [(1)] *il existe une application continue $A :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ strictement croissante en chacune de ses variables.*

Démonstration. — Soit $n \geq 3$ le plus petit entier pour lequel il existe un ensemble définissable A de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas binaire.

Par le théorème de décomposition cellulaire, on peut supposer que A est le graphe d'une application définissable $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une cellule de $\mathbb{R}^{n-1}$.

[(1)] Ce lemme est une conséquence immédiate de [**23**].

Montrons que la cellule D est de dimension maximale ; si par l'absurde $d := \dim D < n-1$ alors, par la proposition 1.2.7, on trouverait une cellule $\widetilde{D}$ de $\mathbb{R}^d$ et une bijection définissable $\phi : \widetilde{D} \to D$.

Par minimalité de n, le graphe de $f \circ \phi$ serait alors binaire, comme le serait le graphe de ϕ.

Le graphe de f est alors l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n | \exists t \in \mathbb{R}^d, (t,x) \in \Gamma(\phi), (t,y) \in \Gamma(f \circ \phi)\},$$

qui est binaire par le corollaire 2.1.7.

Par ailleurs, pour chaque $1 \leq i \leq n-1$, l'ensemble des $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in D$ pour lesquels il existe un voisinage U de a_i sur lequel la fonction $b \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots a_n)$ est définie et strictement croissante (respectivement strictement décroissante, constante) est définissable.

Après une décomposition cellulaire, on peut donc supposer que pour chaque i, le type de monotonie de f en un point $a \in D$ dans la variable x_i est ne dépend pas du choix de a.

Il reste à montrer qu'il existe $1 \leq i < j \leq n-1$ tels que f n'est pas constante en les variables x_i et x_j.

Si ce n'était pas le cas, il existerait un entier k tel que f soit de la forme

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_k) \cdot \mathbf{1}_D(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

où g est une fonction d'une variable définie sur la projection de D sur le $k$ième axe des coordonnées et et $\mathbf{1}_D$ est la fonction caractéristique de D.

Le graphe de g est alors définissable car $y = g(x)$ si et seulement si il existe un $(n-2)$-uplet $(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ pour lequel le n-uplet $(t_1, \ldots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n$ appartient au graphe de f.

Le graphe de f est donc binaire car c'est l'intersection de l'ensemble

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n | (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D\},$$

(ensemble qui est binaire par minimalité de n) et de l'ensemble binaire

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n | (x_k, y) \in \Gamma(g)\}.$$

□

Corollaire 4.1.2. — *Soit $\mathcal{S}$ une expansion stricte de $\mathcal{CSA}$.*

Si $\mathcal{S}$ est un réduit de $\mathcal{SA}$ alors $\mathcal{S}$ définit une application analytique $A :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ strictement croissante en chacune de ses variables.

$\mathcal{S}$ étant un réduit de $\mathcal{SA}$, si $\mathcal{S}$ était binaire alors $\mathcal{S}$ serait, par définition $\mathcal{CSA}$, un réduit de $\mathcal{CSA}$.

Il existe donc une fonction $A :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ strictement croissante en chaque variable et définissable dans $\mathcal{S}$ donc dans $\mathcal{SA}$.

Mais $\mathcal{SA}$ admet un théorème de décomposition analytique.

Quitte à restreindre A à un produit d'intervalle ouverts et à composer par des fonctions d'une variable, on se ramène ainsi au cas où A est analytique.

D'où ce corollaire.

4.2. Bâtir un corps

Soit $\mathcal{S}$ une expansion stricte de $\mathcal{CSA}$ telle que $\mathcal{S}$ est un réduit de $\mathcal{SA}$.

Nous allons prouver (2) que la restriction de l'addition ou de la multiplication à un ouvert est définissable dans $\mathcal{S}$.

La construction repose sur la remarque suivante : si f et g sont des fonctions d'un voisinage de 0 dans un voisinage de 0, on a l'égalité $(f \circ g)'(0) = f'(0) \cdot g'(0)$.

Certes, on ne sait pas *a priori* dériver dans $\mathcal{S}$; néanmoins comparer les pentes de deux composées n'est pas seulement une opération différentielle mais aussi géométrique : cette comparaison peut donc se faire de manière définissable.

Nous allons donc construire un intervalle ouvert de paramètres I et une famille définissables de fonctions $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paramétrée par I telle que

$$\forall a \in I, g_a(0) = 0,$$

de manière à pouvoir composer les g_a entre elles.

La o-minimalité permettra d'ordonner les fonctions entre elles en comparant leurs «pentes » en 0 : si l'on prend deux composées $g_a \circ g_b$ et $g_c \circ g_d$ alors, à droite de 0, ou bien $(g_a \circ g_b) = (g_c \circ g_d)$, ou bien $(g_a \circ g_b) < (g_c \circ g_d)$ ou bien $(g_a \circ g_b) > (g_c \circ g_d)$.

On interprètera alors une loi de composition $a * b$ sur I vérifiant $a * b = c * d$ si et seulement si si les «pentes » de $g_a \circ g_b$ et de $g_c \circ g_d$ sont

(2) Cette construction provient directement des idées issues de [**17**], [**25**], [**26**], [**27**] et [**28**] où sont prouvés des résultats plus généraux (mais moins précis).

«proches », avant de montrer que cette loi permet de définir l'addition ou la multiplication.

4.2.1. Une famille de courbes. —

Lemme 4.2.1. — *Soit $\mathcal{S}$ une expansion o-minimale de $(\mathbb{R};<)$.*

Suppsons que la structure $\mathcal{S}$

- *n'est pas binaire,*
- *admet un théorème de décomposition cellulaire analytique,*
- *définit l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ et chacune des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto ax+b$ quand (a,b) parcourt $\mathbb{R}^2$.*

Il existe alors une application $F : [0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définissable dans $\mathcal{S}$ telle que la restriction de F à $]0,1[\times[0,1[$ admet un prolongement analytique sur un voisinage de $]0,1[\times[0,1[$ et telle que

1. $\forall a \in [0,1[, F(a,0) = 0$ *et*
2. $\forall (a,b) \in]0,1[^2, a < b \Rightarrow \big(F(a,x) < F(b,x), \forall x \in]0,1[\big)$.

Démonstration. — • On construit comme dans le paragraphe précédent une fonction $A :]-1,1[^2 \to \mathbb{R}$ analytique, strictement croissante en chacune de ses variables et telle que $A(0,0) = 0$.

L'inégalité $A(-1, A(0,0)) < 0$ et la continuité de la fonction $a \mapsto A(-1, A(a,0))$ nous assure qu'il existe un $\eta > 0$ tel que

$$A(-1, A(a,0)) < 0, \ a \in [0,\eta[.$$

Or, par croissance de A, on a $A(0, A(a,0)) > 0$.

Pour tout $a \in [0,\eta[$, le théorème de la valeur intermédiaire nous donne donc l'existence d'un unique $b \in]-1,0]$ tel que $A(b, A(a,0)) = 0$.

Considérons alors l'application $a \mapsto \beta(a)$ donnée par

$$A(\beta(a), A(a,0)) = 0 \text{ pour tout } a \in [0,\eta[.$$

Cette application est définissable dans $\mathcal{S}$ et la croissance stricte de A en sa première variable assure que β est strictement décroissante et que $\lim_{a\to 0} \beta(a) = 0$.

L'application $F : [0,\eta[\times[0,1[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$F(a,x) = A(\beta(a), A(a,x))$$

vérifie alors la condition 1. de l'énoncé du lemme.

Pour autant, la condition 2. n'est pas encore établie.

Ainsi pour $A(x, y) = x + y$, cette construction donne $F(a, x) = x$ et ce pour tout a ; la famille de fonctions obtenue $x \mapsto F(a, x)$ est donc réduite à une unique fonction [(3)].

• Nous allons prouver que l'on peut modifier F en composant par des fonctions de translation et la fonction racine carrée pour que la composée vérifie la propriété 2.

Soit g la réciproque de l'application $]-1, 1[\to \mathbb{R}; y \mapsto A(0, y)$. g est définissable dans $\mathcal{S}$; le théorème de décomposition cellulaire analytique nous assure qu'il existe un $x_0 \in A(0,]-1, 1[)$ et un voisinage ouvert U de x_0 sur lequel g est analytique.

Quitte à considérer l'application définissable $(a, x) \mapsto A(a, g(x + x_0))$ et à composer par des applications affines d'une seule variable, on peut supposer que $A(0, x) = x$ pour tout $x \in]-1, 1[$ (tout en gardant le fait que A est analytique sur $]-1, 1[^2$ et strictement croissante en chacune de ses variables).

Quitte à restreindre A et à composer par des fonctions affines d'une seule variable, A se développe alors sous la forme

$$A(a, x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(a) x^k$$

où les d_k sont des applications analytiques sur $]-1, 1[$.

Comme $d_1(0) = 1$, la fonction d_1 n'est pas la fonction nulle.

Comme précédemment, le théorème des valeurs intermédiaires nous donne un réel $\eta > 0$ et deux applications $\beta : [0, \eta[\to \mathbb{R}$ et $\gamma : [0, \eta[\to \mathbb{R}$ définissables dans $\mathcal{S}$, analytiques sur l'intervalle $]0, \eta[$ et continues en 0 données par

$$A(\beta(a), A(a, 0)) = 0\,,\ a \in]0, \eta[$$

et

$$A(\gamma(a), A(a, 0)^{1/2}) = 0\,,\ a \in]0, \eta[.$$

[(3)] c'est le cas d'*effondrement de la famille* décrit dans [**17**] et [**28**]

Nous allons prouver que, quitte à composer par des fonctions affines d'une seule variable, l'une des deux fonctions F et G données respectivement par

$$F(a,x) = A(\beta(a), A(a,x)) \text{ pour } (a,x) \in]0,\eta[\times[0,1[$$

et

$$G(a,x) = A(\gamma(a), (A(a,x^2))^{1/2}) \text{ pour } (a,x) \in]0,\eta[\times[0,1[,$$

satisfait 2.

Ces deux fonctions sont bien définissables dans $\mathcal{S}$ comme composées de fonctions définissables dans $\mathcal{S}$. Par ailleurs comme $A(a,0) > 0$ pour tout $a > 0$ et comme la fonction $t \mapsto t^{1/2}$ est analytique en tout point différent de 0, les fonctions F et G se prolongent bien de manière analytique sur un voisinage de $]0,\eta[\times[0,1[$. Enfin, par construction de β et γ, ces deux fonctions satisfont la condition 1.

Remarquons que si $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une application définissable dans $\mathcal{S}$, les $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a \mapsto H(a,x)$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur un ensemble $]0,\epsilon_x[$ forment un ensemble définissable de $\mathbb{R}$.

Si par exemple, l' ensemble des x pour lesquels ces fonctions sont strictement croissantes est d'intérieur non vide alors on trouve un intervalle $[y,z]$ et un $\epsilon > 0$ (uniforme en x par compacité de $[y,z]$) tel que pour chaque $x \in [y,z]$ la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0,\varepsilon[& \to & \mathbb{R}, \\ a & \mapsto & H(a,x) \end{array}$$

est strictement croissante.

On a ainsi réduit le problème prouver qu'il n'est pas possible que F et G soient telles que pour chaque $x \in [0,1[$, les fonctions $a \mapsto F(a,x)$ et $a \mapsto G(a,x)$ sont constantes sur $]0,\eta[$.

Supposons par l'absurde que pour chaque $x \in [0,1[$, les fonctions $a \mapsto F(a,x)$ et $a \mapsto G(a,x)$ sont constantes sur $]0,\eta[$.

Chacune de ces fonctions $a \mapsto F(a,x)$ et $a \mapsto G(a,x)$ est continue sur $[0,\eta[$; on a donc

$$\lim_{a\to 0} F(a,x) = F(0,x) = x = G(0,x) = \lim_{a\to 0} G(a,x).$$

Ainsi pour tout $(b,c) \in]0,\eta[^2$ et tout $x \in]0,1[$ on a l'égalité

$$A(\beta(b), A(b,x)) = F(b,x) = x = G(c,x) = A(\gamma(c), (A(a,x^2))^{1/2}).$$

Or chacune des applications β et γ réalise une bijection croissante d'un intervalle $[0,\rho[$ dans un intervalle $[0,\rho'[$.

Pour chaque $b > 0$ suffisamment petit, il existe donc un (unique) c tel que $\beta(b) = \gamma(c)$.

Si b et c sont tels que $\beta(b) = \gamma(c) := \delta$, l'égalité

$$A(\delta, A(b,x)) = A(\delta, A(c,x^2)^{1/2})$$

et la croissance stricte de l'application $y \mapsto A(\delta, y)$ nous assure alors que

$$A(b,x^2)^{1/2} = A(c,x),$$

ce qui s'écrit aussi

$$A(b,x^2) = A(c,x)^2.$$

Intéressons nous au développement de $A(c,x)^2$ au voisinage de 0.

Le coefficient de degré 1 en X du développement de $A(c,X)^2$ est $2d_0(c)d_1(c)$.

Mais comme $A(c,X)^2 = A(b,X^2)$, les coefficients de degrés impaires du développement de $A(c,X)^2$ sont tous nuls : d_1 n'étant pas la fonction nulle et l'anneau des fonction analytique sur $]-1,1[$ étant intègre, d_0 est donc la fonction nulle.

On a ainsi une **contradiction** avec le fait que $x \mapsto A(0,x)$ est strictement croissante.

Ainsi, la condition 2. est satisfaite par l'une ou l'autre des deux fonctions F ou G.

$\square$

4.2.2. Composition et pentes. —

Lemme 4.2.2. — *Soit $\mathcal{S}$ une expansion o-minimale de $(\mathbb{R};<)$.*

Supposons que $\mathcal{S}$ est une expansion stricte de $\mathcal{CSA}$ et est un réduit de $\mathcal{SA}$ alors il existe un intervalle ouvert non vide I tel que les restrictions à I^2 de l'addition ou de la multiplication est définissable dans $\mathcal{S}$.

Démonstration. — Par le lemme précédent,il existe $F:]0,1[\times[0,1[\to\mathbb{R}$ une application définissable dans $\mathcal{S}$ qui admet un prolongement analytique sur un voisinage de $]0,1[\times[0,1[$ et telle que

1. $\forall a\in]0,1[, F(a,0)=0$ et
2. $\forall(a,b,x)\in]0,1[^3, \big(a<b\Rightarrow F(a,x)<F(b,x)\big)$

Quitte à restreindre F et à composer par des fonctions affines d'une seule variable, on peut développer F au voisinage de $]0,1[\times[0,1[$ sous la forme

$$F(a,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}s_k(a)x^k,$$

où les fonctions s_k sont des fonctions analytiques sur $]0,1[$.

La condition 2. sur F nous assure que les fonctions s_k ne sont pas toutes constantes.

Soit k_1 le plus petit des k pour lequel s_k n'est pas constante ; l'hypothèse 2. et l'analycité de F nous assure que s_{k_1} est strictement croissante à droite de 0 ; elle réalise donc une bijection entre un intervalle $]0,\varepsilon[$ et un intervalle ouvert non vide I.

s_{k_1} est par ailleurs une dérivée partielle de la fonction semi-algébrique F (rappelons que $\mathcal{S}$ est un réduit de $\mathcal{SA}$) ; s_{k_1} est donc semi-algébrique. Elle ne dépend par ailleurs que d'une variable ; $\mathcal{S}$ étant une expansion de $\mathcal{CSA}$, s_{k-1} est définissable dans $\mathcal{S}$.

Soit f sa réciproque ; f est semi-algébrique donc définissable dans $\mathcal{S}$.

Posons $G:I\times]0,1[\to\mathbb{R}$ l'application donnée par $G(a,x)=F(f(a),x)$.

G s'écrit alors sous la forme

$$G(a,x)=\sum_{k=1}^{k_1-1}t_kx^k+(a+\eta(a,x))x^{k_1}$$

où les t_k sont des constantes et la fonction η satisfait $\lim_{x\to0}\eta(a,x)=0$ pour tout $a\in I$.

On distingue alors deux cas :

– *Cas multiplicatif* : si $k_1=1$ ou si $t_1=\cdots=t_{k_1-1}=0$, il existe une fonction $(a,b,x)\mapsto\rho(a,b,x)$ telle que $\forall(a,b)\in I^2$, $\lim_{x\to0}\rho(a,b,x)=0$ et telle qu'on a l'égalité

$$G(a,G(b,x))=\big(ab^{k_1}+\rho(a,b,x)\big)\cdot x^{2k_1};$$

on posera alors $M_{ab}(x) = \big(ab^{k_1} + \rho(a,b,x)\big) \cdot x^{2k_1}$.

– *Cas additif* : si $k_1 > 1$ et si l'un des $t_1, \dots, t_{k_1-1}$ est non nul, soit k_2 le plus petit des k tel que $t_k \neq 0$ et P le polynôme $P(x) = \sum_{k=1}^{k_1-1} t_k x^k$. On se ramène facilement au cas où $t_{k_2} = 1$.
Le polynôme P réalise une bijection d'un intervalle $]0,\delta[$ dans un intervalle $J =]0,\delta'[$. Sa réciproque $g : J \to \mathbb{R}$ est semi-algébrique donc définissable dans $\mathcal{S}$.
Il existe alors une fonction $(a,b,x) \mapsto \rho(a,b,x)$ telle que $\forall (a,b) \in I^2$, $\lim_{x\to 0} \rho(a,b,x) = 0$ et telle que, si l'on pose $H(a,x) = G(a, g(x^{k_2}))$, on a l'égalité

$$H(a, H(b,x)) = x^{2k_1} + (a + k_1 b + \rho(a,b,x))x^{k_1+k_2}.$$

On posera alors $S_{ab}(x) = x^{2k_1} + (a + k_1 b + \rho(a,b,x))x^{k_1+k_2}$.

Dans le cas multiplicatif, l'application

$$I^2 \times [0,1[\to \mathbb{R}, (a,b,x) \mapsto M_{ab}(x)$$

est alors définissable dans $\mathcal{S}$; il en est de même dans le cas additif pour l'application

$$I^2 \times [0,1[\to \mathbb{R}, (a,b,x) \mapsto S_{ab}(x).$$

Remarquons les implications

– dans le cas multiplicatif

$$\big(ab^{k_1} < cd^{k_1}\big) \Rightarrow \big(\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0,\varepsilon[, M_{ab}(x) < M_{cd}(x)\big)$$

et

$$\big(\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0,\varepsilon[, M_{ab}(x) < M_{cd}(x)\big) \Rightarrow \big(ab^{k_1} \leq cd^{k_1}\big)$$

– dans le cas additif

$$\big(a + k_1 b < c + k_1 d\big) \Rightarrow \big(\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0,\varepsilon[, S_{ab}(x) < M_{cd}(x)\big)$$

et

$$\big(\exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0,\varepsilon[, S_{ab}(x) < M_{cd}(x)\big) \Rightarrow \big(a + k_1 b \leq c + k_1 d\big).$$

Dans le cas multiplicatif, choisissons $d \in I, d \neq 0$; l'application $\odot$ de I^2 dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\otimes(a,b) = \inf\{c \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall x \in]0,\varepsilon[, M_{ab}(x) < M_{cd}(x)\}$$

est alors définissable dans $\mathcal{S}$. Quitte à restreindre I, celui-ci ne contient pas 0.

Posons L l'image réciproque de I par la fonction $x \mapsto x^{1/k_1}$. On obtient alors la définissabilité dans $\mathcal{S}$ de l'application

$$I \times L \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto \otimes(a, b^{1/k_1})/d^{k_1}$$

qui n'est autre que la restriction à $I \times L$ de la multiplication.

Dans le cas additif, choisissons $d \in I$; l'application $\oplus$ de I^2 dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$\oplus(a,b) = \inf\{c \in I, \exists\varepsilon > 0, \forall x \in]0,\varepsilon[, S_{ab}(x) < S_{cd}(x)\}$$

est alors définissable sur $\mathcal{S}$.

Posons L l'image réciproque de I par la fonction $x \mapsto x/k_1$. On obtient alors la définissabilité dans $\mathcal{S}$ de l'application

$$I \times L \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto \oplus(a, b/k_1) - k_1 d$$

qui n'est autre que la restriction à $I \times L$ de l'addition.

□

Remarque 4.2.3. — Par le théorème 4.4. de [**27**], on aurait pu obtenir l'interprétabilité dans $\mathcal{S}$ d'une structure de corps réel clos $\mathcal{T} = (I, \{0,1\}, \{\prec\}, \{\oplus, \odot\})$ sur un intervalle ouvert I.

Le corollaire 2.4. de [**26**] nous donnerait alors que tout ensemble semi-algébrique de I^n serait définissable dans $\mathcal{T}$ donc dans $\mathcal{S}$ puis en composant avec la réciproque de la fonction $t \mapsto t/(1-t^2)$ on aurait la définissabilité de tous les ensembles semi-algébriques dans $\mathcal{S}$.

4.2.3. Prolonger les graphes restreints. — On a montré que la restriction de l'addition ou la restriction de la multiplication à un pavé (c'est à dire un ensemble de la forme $[a,b] \times [c,d]$ avec $a < b$ et $c < d$) est définissable dans $\mathcal{S}$.

Nous allons en déduire que l'addition et la multiplication (non restreintes)[(4)] sont définissables dans $\mathcal{S}$.

[(4)] Il faut rappeler que [**25**] et [**29**] prouvent qu'il existe une et une seule structure (o-minimale) comprise strictement entre la structure des semi-linéaires et celle des semi-algébriques : la structure où on a ajouté aux semi-linéaires la multiplication restreinte à un pavé.

Proposition 4.2.4. — *Dans une structure o-minimale qui définit les fonctions semi-algébriques d'une variable, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un pavé non vide K tel que la restriction de l'addition à K est définissable.*
2. *Il existe un pavé non vide K tel que la restriction de la multiplication à K est définissable.*
3. *Pour chaque pavé K, la restriction de l'addition à K est définissable.*
4. *Pour chaque pavé K, la restriction de la multiplication à K est définissable.*
5. *La restriction de l'addition à $]1, +\infty[^2$ est définissable.*
6. *La restriction de la multiplication à $]1, +\infty[^2$ est définissable.*
7. *L'addition est définissable.*
8. *La multiplication est définissable.*

Démonstration. — • L'implication 7. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1., l'implication 7. $\Rightarrow$ 5. $\Rightarrow$ 1., l'implication 8. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 2. et l'implication 8. $\Rightarrow$ 6. $\Rightarrow$ 2. sont claires.

• Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto t/4$ sont définissable dans $\mathcal{S}$.

Par ailleurs, la soustraction restreinte à un pavé (respectivement non restreinte) est définissable dans $\mathcal{S}$ si l'addition restreinte à un suffisamment grand pavé (resp. non restreinte) l'est aussi.

Les implications 3. $\Rightarrow$ 2., 3. $\Rightarrow$ 4., 7. $\Rightarrow$ 6. et 7. $\Rightarrow$ 8. sont alors assurées par l'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = \frac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{4}.$$

• Remarquons que la fonction $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(s, t) = s/t$ est définissable dans $\mathcal{S}$ si la multiplication l'est aussi.

Par ailleurs la fonction $t \mapsto 1 + t$ est définissable dans $\mathcal{S}$.

L'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ (1 + x/y) \cdot y & \text{sinon.} \end{cases}$$

nous assure alors implications 8. $\Rightarrow$ 3., et 8. $\Rightarrow$ 7.

Mieux, si K est un pavé, il existe un pavé K' tel que

$$\forall (s,t) \in K', t \neq 0 \text{ et } (t, s/t) \in K\}.$$

Si la multiplication restreinte à K est définissable dans $\mathcal{S}$, il en est de même de la restriction de f à K'. L'implication 2. $\Rightarrow$ 1. est alors immédiate.

Enfin, l'identité

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, x+y = \begin{cases} (1+x/y)\cdot y & \text{si. } |x| > |y| \\ (1+y/x)\cdot x & \text{si. } |x| < |y| \\ 2x & \text{si } |x| = |y| \end{cases}$$

donne l'implication 6. $\Rightarrow$ 5. en remarquant que la restriction de f à $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2, t > 1 \text{ et } s > t\}$ est définissable dans $\mathcal{S}$ si la restriction de la multiplication à $]1,+\infty[^2$ l'est aussi.

• Prouvons l'implication 1. $\Rightarrow$ 3. ; soit $K = [a,b] \times [c,d]$ un pavé non vide tel que la restriction de l'addition à K est définissable dans $\mathcal{S}$.

Soit $K' = [a',b'] \times [c',d']$ un autre pavé. Il existe un réel $M > 0$ tel que $K' \subseteq [M(a-b)/2, M(b-a)/2] \times [M(c-d)/2, M(d-c)/2] = K''$.

Soit $(x,y) \in K''$. Remarquons que $\left(\frac{2x+M(a+b)}{2M}, \frac{2y+M(c+d)}{2M}\right) \in K$; l'identité

$$x+y = M \cdot \left(\frac{2x+M(a+b)}{2M} + \frac{2y+M(c+d)}{2M}\right) - \frac{M(a+b+c+d)}{2}$$

nous assure alors que la restriction de l'addition à K'' est définissable dans $\mathcal{S}$ et donc que la restriction de l'addition à $K' \subseteq K''$ y est aussi définissable.

• Prouvons l'implication 4. $\Rightarrow$ 6.

Supposons 4. ; la multiplication restreinte au pavé $[-1,1]^2$ est alors définissable dans $\mathcal{S}$.

Par ailleurs la fonction (partielle) $t \mapsto t^{-1}$ est définissable dans $\mathcal{S}$.

L'identité

$$\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2, xy = (x^{-1} \cdot y^{-1})^{-1}$$

nous assure alors que la restriction de la multiplication à $]1,+\infty[^2$ est définissable dans $\mathcal{S}$.

• Prouvons l'implication 5. $\Rightarrow$ 7. ; il est claire que la restriction de l'addition aux axes des coordonnées est aussi définissable dans $\mathcal{S}$, comme l'est l'application $t \mapsto -t$.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty\, [^2$; remarquons que $(x+1, y+1) \in]1, +\infty\, [^2$.

L'identité $x+y = (x+1)+(y+1)-2$ nous assure alors la définissabilité de la restriction de l'addition au quadrant $]0, +\infty[^2$.

De même, si $(x, y) \in]-\infty, 0\, [^2$, $(-x+1, -y+1) \in]1, +\infty\, [^2$ et l'identité $x + y = -\big((-x+1) + (-y+1)\big) + 2$ nous assure la définissabilité de la restriction de l'addition au quadrant $]-\infty, 0[^2$.

Pour $(x, y) \in]0, +\infty[\times] - \infty, 0[$, remarquons que le graphe de la soustraction

$$\{(x, y) \in]0, +\infty[^2, x \geq y\} \to \mathbb{R}\,; (x, y) \mapsto x - y$$

est définissable dans $\mathcal{S}$ si la restriction de l'addition à $[0, +\infty[^2$, l'est. L'identité

$$x + y = \begin{cases} x - (-y) & \text{si} \quad |x| \geq |y| \\ -\big((-y) - x\big) & \text{si} \quad |x| \leq |y| \end{cases}$$

assurent alors la définissabilité dans $\mathcal{S}$ de la restriction de l'addition au quadrant $]0, +\infty[\times] - \infty, 0[$.

On prouve de même la définissabilité de la restriction de l'addition au dernier quadrant $] - \infty, 0[\times]0, +\infty[$.

L'addition (non restreinte) est donc définissable dans $\mathcal{S}$ car son graphe est union de graphes définissables dans $\mathcal{S}$.

Une petite chasse dans les implications prouvées donne la suite d'implications :

$$2. \Rightarrow 1. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 6. \Rightarrow 5. \Rightarrow 7. \Rightarrow 8. \Rightarrow 2.$$

$\square$

Ainsi, si la restriction de la multiplication ou de la multiplication à un pavé non vide est définissable dans $\mathcal{S}$ alors l'addition et la multiplication (non restreintes) y sont aussi définissables.

Or le paragraphe précédent nous assurait la définissabilité de l'une de ces fonctions restreintes ; $\mathcal{S}$ définit donc l'addition et la multiplication, et par suite tous les ensembles semi-algébriques :

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{SA} \rangle.$$

Deuxième PARTIE II

SOUS-ANALYTICITÉ ET GÉNÉRATION

Les hommes qui poursuivent une multitude de femmes peuvent aisément se répartir en deux catégories. Les uns cherchent chez toutes les femmes leur propre rêve, leur idée subjective de la femme. Les autres sont mus par le désir de s'emparer de l'infinie diversité du monde féminin objectif.

L'obsession des premiers est une obsession *romantique* : ce qu'ils cherchent chez les femmes, c'est eux-mêmes, c'est leur idéal, et ils sont toujours et continuellement déçus parce que l'idéal, comme nous le savons, c'est ce qu'il n'est jamais possible de trouver. Comme la déception qui les pousse de femmes en femme donne à leur inconstance une sorte d'excuse mélodramatique, bien des femmes trouvent émouvante leur opiniâtre polygamie.

L'autre obsession est une obsession *libertine*, et les femmes n'y voient rien d'émouvant : du fait que l'homme ne projette pas sur les femmes un idéal subjectif, tout l'intéresse et rien ne peut le décevoir. Et précisément cette inaptitude à la déception a en soi quelque chose de scandaleux. Aux yeux du monde, l'obsession du baiseur libertin est sans rémission (parce qu'elle n'est pas rachetée par la déception).

Milan Kundera,
L'Insoutenable légèreté de l'être.

CHAPITRE 5

LES ENSEMBLES SOUS-ANALYTIQUES

Nous prouvons que, pour tout entier n, l'expansion o-minimale $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ du corps des réels dont les fonctions nommées sont les fonctions analytiques restreintes à n variables définit strictement moins d'ensembles que l'expansion o-minimale $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ du corps des réels dont les fonctions nommées sont les fonctions analytiques restreintes dont on n'a pas borné le nombre de variables, tandis que ces deux structures définissent les même ensembles de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ceci prouve en particulier que la propriété « *Pour toute expansion o-minimale $\mathcal{S}$ du corps des réels, il y a un entier n tel que $\mathcal{S}$ et la structure o-minimale* $(\mathbb{R}\,;\emptyset, \langle \mathcal{S}\,\rangle_n, \emptyset)$ *(engendrée par les ensembles définissables d'arité n) définissent les mêmes ensembles en arité quelconque* » est fausse : la structure des sous-analytiques globaux ne la satisfait pas.

5.1. Le théorème du complément de Gabrielov

Définition 5.1.1. — Soit n un entier. On dit qu'une application f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une *fonction analytique restreinte* s'il existe un voisinage ouvert U de $[-1,1]^n$ et une application analytique $F : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si} \quad x \in [-1,1]^n \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1,1]^n \end{cases}$$

On note $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sous-ensemble de $\amalg_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ formé par ces applications.

Définition 5.1.2. — On note $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ l'expansion du corps ordonné des réels

$$\mathbb{R}_{\mathrm{an}} = (\mathbb{R}\,; \{0,1\}, \{<\}, \{+,\cdot\} \cup \mathcal{Q})$$

On appellera les ensembles définissables dans cette structure les *ensembles sous-analytiques.*

Théorème 5.1.3 (**[11]**). — $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ *est o-minimale et modèle-complète.*

Mieux, la modèle-complétude est explicite.

Définition 5.1.4. — Soit f un élément de $\mathcal{Q}_n$.

Soit U un voisinage de $[-1,1]^n$ et $F : U \to \mathbb{R}$ une fonction analytique telle que $f|_{[-1,1]^n} = F|_{[-1,1]^n}$.

Si $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) \in (\{1, \ldots, n\})^k$, on note $\delta_\nu f$ l'élément[1] de $\mathcal{Q}_n$ donné par

$$(\delta_\nu f)(x) = \begin{cases} \frac{\partial^k F}{\partial x_{\nu_1} \ldots \partial x_{\nu_k}}(x) & \text{si} \quad x \in [-1,1]^n \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-1,1]^n \end{cases}$$

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie de $\mathcal{Q}$. On dit que $\mathcal{G}$ forme une multi-δ-algèbre si

1. l'application $x \mapsto 0$ et la fonction caractéristique de $[-1,1]$ appartiennent à $\mathcal{G}_1$,
2. $(\mathcal{G}_n; +, \cdot)$ forme une $\mathbb{R}$-algèbre pour chaque n,
3. si $f \in \mathcal{G}_n$ alors la fonction $(x_1, \ldots, x_{n+p}) \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ appartient à $\mathcal{G}_{n+p}$ quelle que soit l'application $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+p\}$.
4. si $f \in \mathcal{G}_n$ alors $\delta_i f \in \mathcal{G}_n$ quel que soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Théorème 5.1.5 **(du complémentaire explicite [12])**

Si $\mathcal{G}$ est une multi-δ-algèbre alors la structure

$$(\mathbb{R}\,; \{0,1\}, \{<\}, \{+,\cdot\} \cup \mathcal{G})$$

est modèle-complète.

On appelle ensembles sous-$\mathcal{G}$-analytiques *les ensembles définissables dans cette structure.*

---

[1] cette définition ne dépend pas du choix de F.

Un des lemmes techniques présent dans la preuve de ce théorème donne un résultat plus précis :

Théorème 5.1.6 **(lemme de section des fibres [12])**
Soit $\mathcal{G}$ une multi-δ-algèbre.

Pour tout ensemble sous-$\mathcal{G}$-analytique $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ de dimension d, il existe un entier p, une famille finie $\{X_\nu\}$ d'ensembles sous-$\mathcal{G}$-analytiques de $\mathbb{R}^{m+p}$ et V un sous-$\mathcal{G}$-analytique dans $\mathbb{R}^{m+p}$ tels que, si on pose $d = \dim Y$, on a

1. $Y = \pi V \cup \bigcup \pi X_\nu$ *(où π est la projection de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$)*
2. $\dim X_\nu = d$, $\dim \pi V < d$ *et la projection $\pi_{|X_\nu} : X_\nu \to Y$ est de rang d en tout point de X_ν*
3. *localement en tout $s \in X_\nu$, $\{x - s | x \in X_\nu\}$ est l'ensemble des zéros de $m + p - d$ fonctions $f_i : \mathbb{R}^{m+p} \to \mathbb{R}$ de $\mathcal{G}$ et le rang de $(df_i)_i$ est $m + p - d$*
4. $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ *pour $\lambda \neq \mu$.*

5.2. La structure des sous-n-analytique

Théorème 5.2.1. — *La structure* $(\mathbb{R}\,; \{0, 1\}, \{<\}, \mathcal{Q}_n \cup \{+, \cdot\})$ *et la structure* $(\mathbb{R}\,; \{0, 1\}, \{<\} \cup \langle\, \mathbb{R}_{\mathrm{an}}\rangle_{n+1}, \{+, \cdot\})$ *définissent les même ensembles.*

Nous notons dans la suite $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ la structure $(\mathbb{R}\,; \{0, 1\}, \{<\}, \mathcal{Q}_n \cup \{+, \cdot\})$.

Preuve. — Le graphe de chaque fonction analytique restreinte à n variables étant un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$, il est clair que les ensembles définissables dans la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ le sont aussi dans la structure $(\mathbb{R}\,; \{0, 1\}, \{<\} \cup \langle\, \mathbb{R}_{\mathrm{an}}\rangle_{n+1}, \{+, \cdot\})$.

Prouvons l'inclusion inverse par récurrence sur n : il s'agit de montrer que tout ensemble sous-analytique d'arité $n + 1$ est définissable dans $(\mathbb{R}\,; \{0, 1\}, \{<\}, \mathcal{Q}_n \cup \{+, \cdot\})$.

Le cas $n = 0$ est trivial.

Pour prouver le pas d'induction, le théorème de décomposition cellulaire nous ramène à prouver qu'une fonction sous-analytique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$

Remarquons que le complémentaire de $K = [-1,1]^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est envoyé dans K par la fonction $\iota : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n})$. L'union de deux ensembles définissables étant définissable, on se ramène ainsi, quitte à composer à gauche par ι, à prouver que $f|_K$ est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$,

Soit $\mathcal{C}$ une $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$-décomposition cellulaire de $\mathbb{R}^n$ adaptée à K telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$ le signe de $|f(x)| - 1$ est constant sur C et f est continue sur C. L'hypothèse de récurrence assure aussi que chaque C est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n-1)}$; en particulier, $\mathcal{Q}_{n-1}$ étant définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$, chaque cellule est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$.

Pour toute cellule $C \subseteq K$, quitte à considérer $\iota \circ f|_C$, on se ramène ainsi au cas où $f : C \to \mathbb{R}$ est à valeurs dans $[-1,1]$ et où C est une cellule incluse dans $[-1,1]^n$.

Soit alors G l'adhérence du graphe de $f|_C$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$; G est un compact et sa dimension d est $\leq n$.

Rappelons alors ce cas particulier du théorème d'uniformisation de Hironaka (voir par exemple [**1**]).

***Théorème 5.2.2* (Hironaka)**. — *Soit X un ensemble sous-analytique global dans $\mathbb{R}^{n+1}$, compact, de dimension d.*

Il existe un entier N, une variété analytique Y compacte de dimension d dans $\mathbb{R}^N$ et une application analytique réelle $\phi : Y \to X$, tels que $X = \phi(Y)$.

Considérons alors de tels N, Y et ϕ pour G. Par compacité de Y, on a un système fini de cartes analytiques $\psi_j = (\psi_j^1, \dots, \psi_j^N) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$ tel que $Y = \bigcup_j \psi_j([-1,1]^d)$.

G est alors égal à $\bigcup_j \phi \circ \psi_j([-1,1]^d)$; mais chaque composante de chaque $\phi \circ \psi_j$ coïncide sur $[-1,1]^d$ avec une fonction analytique restreinte de n variables.

G est donc définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$.

Par continuité de f sur C, le graphe de $f|_C$ est exactement $G \cap (C \times \mathbb{R})$; le graphe de $f|_C$ est ainsi définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ comme intersection de deux ensembles définissables dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$. $\square$

Définition 5.2.3. — On appelle les ensembles définissables dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ les *ensembles sous-n-analytiques*. Les *fonctions sous-n-analytiques* sont les fonctions dont le graphe est un ensemble sous-n-analytique.

La suite de ce chapitre est consacré à trouver un sous-ensemble sous-analytique de $\mathbb{R}^{n+2}$ qui n'est pas définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$.

5.3. Points sous-n-réguliers

Nous consacrons ce paragraphe à décrire les fonctions $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ définissables dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$.

Définition 5.3.1. — On note $A(\mathcal{Q}_n) = (A_m(\mathcal{Q}_n))_{m\in\mathbb{N}}$ la plus petite multi-δ-algèbre incluse dans $\mathcal{Q}$ contenant $\mathcal{Q}_n$; les éléments de $A_m(\mathcal{Q}_n)$ sont appelés *fonctions analytiques restreintes à m variables ne dépendant essentiellement que de n variables.*

Remarque 5.3.2. — Par stabilité de $\mathcal{Q}_n$ par les opérateurs δ_i, l'ensemble $A_m(\mathcal{Q}_n)$ est donc la sous-algèbre de $\mathcal{Q}_m$ engendrée par les fonctions

$$(t_1, \ldots, t_m) \to h(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}),$$

quand h parcourt $\mathcal{Q}_n$ et σ parcourt $\mathcal{F}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, m\})$.

En particulier, toute fonction analytique restreinte à m variables ne dépendant essentiellement que de n variables peut s'écrire sous la forme

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto P(h_1(t_{\sigma_1(1)}, \ldots, t_{\sigma_1(n)}), \ldots, h_k(t_{\sigma_k(1)}, \ldots, t_{\sigma_k(n)})),$$

où

- P est un élément de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k]$,
- les h_i sont des éléments de $\mathcal{Q}_n$ et
- les σ_i sont des fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$.

Le théorème de section des fibres nous assure que si on se donne une application $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ alors, au dessus de presque tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, le graphe de f est le germe d'une variété analytique, elle-même projetée de rang plein d'une variété analytique décrite comme lieu des zéros de fonctions de $A(\mathcal{Q}_n)$. Précisons cet énoncé :

Définition 5.3.3. — Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est *sous-n-régulière en* $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ si f est définie au voisinage de 0 et s'il existe un $p \in \mathbb{N}$ et un $p+1$-uplet $(g_1, \dots, g_p)$ d'éléments de $A_{n+p+2}(\mathcal{Q}_n)$ tels que

1. le rang de la matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0)\right)_{\substack{1 \le i \le p+1 \\ n+2 \le j \le n+p+2}}$ est plein,
2. le germe du graphe de $x \mapsto f(x) - f(0)$ en $0 \in \mathbb{R}^{n+2}$ est le projeté sur l'espace des $n+2$ premières coordonnées du germe en $0 \in \mathbb{R}^{n+p+2}$ de la variété analytique
$$\bigcap_{i=1}^{p+1} \{(x_1, \cdots, x_{n+p+2}) \in \mathbb{R}^{n+p+2}\,; g_i(x_1, \cdots, x_{n+p+2}) = 0\}.$$

On dit que f est *sous-n-régulière en* $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ si $x \mapsto f(x-a)$ est sous-n-régulière en 0.

Proposition 5.3.4. — *Si* $f : [-1,1]^{n+1} \to \mathbb{R}$ *est une application sous-n-analytique alors il existe un* $a \in]-1,1[^{n+1}$ *tel que* f *est sous-n-régulière en* a.

Preuve. — Il s'agit d'une application directe du lemme de section des fibres explicite (théorème 5.1.6). □

5.4. Procédé diagonal

Nous chercherons à « contrôler » les fonctions sous-n-analytiques par les fonctions qui servent à les décrire. Celles-ci provenant de fonctions ne dépendant que de n variables, on espère pouvoir alors utiliser un argument diagonal *alla* Cantor pour prouver l'existence d'une fonction analytique restreinte à $n+1$ variable qui ne soit pas sous-n-analytique.

Décrivons d'abord l'ensemble des fonctions sous-n-régulières en zéro : le germe d'une fonction sous-n-régulière est donné par

– un « plan de construction » : le p de la définition 5.3.3 qui donne la dimension supplémentaire où l'on a été chercher une variété analytique à projeter et
– des « briques de constructions » : le $p+1$-uplet $(g_1, \dots, g_{p+1}) \in (A_{n+p+2}(\mathcal{Q}_n))^{p+1}$ de la définition 5.3.3 dont la variété à projeter est le lieu des zéros.

Par la remarque 5.3.2, on peut améliorer cette description : chaque élément de $A_{n+p+2}(\mathcal{Q}_n)$ s'écrit comme un polynôme P à coefficients entiers composé avec des éléments de $\mathcal{Q}_n$ sur les coordonnées desquelles on a fait agir des applications σ_i de $\{1,\ldots,n\}$ dans $\{1,\ldots,m\}$.

On peut donc considérer aussi les polynômes P et les applications σ_i comme participant au « plan de construction » tandis que les « briques » sont des éléments de $\mathcal{Q}_n$.

Définition 5.4.1. — Considérons

$$\Psi : (A_{n+p+2}(\mathcal{Q}_n))^{p+1} \to \mathcal{O}_{n+1}$$

la fonction (partielle) qui

– au $(p+1)$-uplet $(g_1,\ldots,g_{p+1})$ d'éléments de $A_{n+p+2}(\mathcal{Q})_n$ pour lequel le rang de

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(0)\right)_{\substack{1\le i\le p+1\\ n+2\le j\le n+p+2}}$$

est plein

– associe le germe de la fonction analytique à $n+1$ variables dont le graphe est le projeté de l'ensemble

$$\bigcap_{i=1}^{p+1}\{(x_1,\cdots,x_{n+p+2})\in\mathbb{R}^{n+p+2}\,;g_i(x_1,\cdots,x_{n+p+2})=0\}.$$

Cette fonction auxiliaire nous permet de construire une fonction qui « réalise les plans de construction » .

- Soit $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$, $P=(P_1,\ldots,P_{p+1})\in(\mathbb{Z}[T_1,\ldots,T_q])^{p+1}$ et

$$\sigma=(\sigma_j^{(i)})_{\substack{1\le i\le p+1\\ 1\le j\le q}}\in\Big((\mathcal{F}(\{1,\ldots,n\},\{1,\ldots,n+p+2\}))^q\Big)^{p+1}.$$

On appelle *fonction d'assemblage de plan* (P,σ) la fonction partielle

$$\Phi_{P,\sigma}:\mathbb{R}\times((\mathcal{Q}_n)^q)^{p+1}\to\mathcal{O}_{n+2}$$

qui,

– au réel y et à l'élément

$$h=(h^{(i)})_{1\le i\le p+1}=(h_j^{(i)})_{\substack{1\le i\le p+1\\ 1\le j\le q}}\in\Big((\mathcal{Q}_n)^q\Big)^{p+1},$$

– associe l'élément

$$y + \Psi(g_1, \ldots, g_{p+1}) \in \mathcal{O}_{n+2},$$

où l'on a posé pour chaque $1 \le i \le p+1$

$$g_i(x_1, \ldots, x_{n+p+2}) = \\ P_i\big(h_1^{(i)}(x_{\sigma_1^{(i)}(1)}, \ldots, x_{\sigma_1^{(i)}(n)}), \ldots, h_q^{(i)}(x_{\sigma_q^{(i)}(1)}, \ldots, x_{\sigma_q^{(i)}(n)})\big).$$

On notera Υ l'ensemble (dénombrable)

$$\amalg_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_q])^{p+1} \times \big((\mathcal{F}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, n+p+2]\}))^q\big)^{p+1}$$

des plans de constructions.

Si $(P, \sigma) \in \Upsilon$, on note $M_{(P,\sigma)}$ l'ensemble de définition de $\Phi_{P,\sigma}$.

Remarque 5.4.2. — Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$; f est sous-n-régulière en 0 si et seulement si le germe de f autour de 0 appartient à l'union des images des fonctions $\Phi_{P,\sigma}$.

Cette description permet alors de contrôler les germes de fonctions sous-n-régulières : les premiers coefficients du développement de Taylor de $\Phi_{P,\sigma}(h)$ ne dépendent que des premiers coefficients du développement de Taylor des $h_j^{(i)}$.

Définition 5.4.3. — Soit m un entier et $D < E$ une paire d'entiers.

On note $\mathbb{R}_{D,E}[X_1, \ldots, X_m]$ l'ensemble des polynômes en m variables de degré $< E$ et d'ordre $\ge D$ en 0.

Il s'identifie naturellement à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{C_m^{D,E}}$, où $C_m^{D,E}$ est le cardinal de l'ensemble des m-uplets d'entiers $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ dont la norme $|\nu| = \sum_i \nu_i$ est $\ge D$ et $< E$.

On notera $T_{DE}^m : \mathcal{O}_m \to \mathbb{R}_{D,E}[X_1, \ldots, X_m]$ l'application (surjective) de troncation des séries formelles donnée par

$$T_{DE}^m(f) = \sum_{D \le |\nu| < E} \frac{\partial^{|\nu|} f}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_m^{\nu_m}}(0) \cdot X_1^{\nu_1} \cdots X_m^{\nu_m}.$$

Proposition 5.4.4. — *Pour tout* (P, σ) *dans*

$$(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_q])^{p+1} \times \big((\mathcal{F}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, n+p+2\}))^q\big)^{p+1}$$

et toute paire $D < E$ entiers, il y a une application rationnelle $\Phi_{P,\sigma}^{D,E}$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M_s \arrow[r, "\Phi_{P,\sigma}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes({T^n_{0E}}^{\otimes q})^{\otimes p+1}"'] & \mathcal{O}_{n+1} \arrow[d, "T^{n+1}_{DE}"] \\ \tilde{M}_s \arrow[r, "\Phi^{D,E}_{P,\sigma}"'] & \mathbb{R}_{D,E}[X_1, \ldots, X_{n+1}] \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, les coefficients de degré compris entre D et E du développement de Taylor autour de 0 d'un élément $\Phi_{P,\sigma}(y, \big(h_j^{(i)}\big))$ ne dépendent que de y et des coefficients de degré inférieur à E du développement autour de 0 des $h_j^{(i)}$, et ce de manière rationnelle.

Preuve. — Cette proposition découle, après une récurrence immédiate, du théorème des fonctions implicites.

□

Nous allons utiliser ces troncations pour nous ramener à des espaces de dimension finie et, en remarquant que la fonction $E \mapsto C_{n+1}(D, E)$ est un polynôme en E de degré $n + 1$, tandis que $E \mapsto C_n(0, E)$ est de degré n, nous allons créer des défauts de surjectivité pour les $\Phi_{P,\sigma}$.

5.5. Translation à la source

Il nous serait facile de produire, par un argument diagonal, une fonction analytique définie sur un voisinage de $[-1, 1]^{n+1}$ qui ne serait pas sous-n-régulière en 0.

Par la proposition 5.3.4, si on produit une fonction analytique définie sur un voisinage de $[-1, 1]^{n+1}$ qui ne soit sous-n-régulière *en aucun point de* $]-1, 1[^{n+1}$, on aura en particulier produit une fonction sous-analytique qui n'est pas sous-n-analytique.

Aussi va-t-on étudier l'ensemble des germes $x \mapsto h(x+a)$ en $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, où f parcourt l'ensemble des germes de fonctions sous-n-régulière et a parcourt $]-1, 1[^{n+1}$; malheureusement on perd alors la dépendance rationnelle entre espaces de dimension finie que l'on a obtenue au paragraphe précédent.

Plus précisément, pour $a \in]-1,1[^{n+1}$, considérons $\tau_a : \mathcal{Q}_{n+1} \mapsto \mathcal{O}_{n+1}$ qui à f associe le germe de $x \mapsto f(x+a)$ en 0. Alors on n'a pas l'égalité

$$T^{n+1}_{DE}(\tau_a(f)) = T^{n+1}_{DE}\big(\tau_a\left(T^{n+1}_{DE}(f)\right)\big);$$

chaque dérivée partielle de $\tau_a(f)$ dépend de toutes le dérivées partielles de f.

Néanmoins, on peut contrôler cette dépendance par des arguments métriques : c'est l'objet de ce paragraphe.

On met sur chaque $\mathbb{R}_{D,E}[Y_1,\dots,Y_{n+1}]$ la norme :

$$\|\sum_\nu a_\nu \overline{Y}^\nu\|_\infty = \max_\nu\{|a_\nu|\}.$$

Proposition 5.5.1. — *Soit $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers, η un réel >0, $a=(a_1,\dots,a_{n+1})$ un point dans $]-1,1[^{n+1}$, f une fonction analytique définie sur un voisinage de $[-1,1]^{n+1}$ et K un entier.*

Si l'on a, pour tout $k>K$, l'inégalité

$$\|T^{n+1}_{D_kD_{k+1}}(f)\|_\infty \leq \frac{\eta}{2^k(D_{k+1}!)^{n+1}},$$

alors

$$\|T^{n+1}_{D_KD_{K+1}}(\tau_a(f)) - T^{n+1}_{D_KD_{K+1}}\big(\tau_a\left(T^{n+1}_{D_KD_{K+1}}(f)\right)\big)\|_\infty \leq \eta.$$

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de l'égalité

$$\frac{\partial^{|\mu|}\big(\tau_a(f)\big)}{\partial Y_1^{\mu_1}\dots Y_{n+1}^{\mu_{n+1}}}(\overline{0}) = \sum_{j\geq k}\ \sum_{\substack{\nu_i\geq\mu_i\\ D_j\leq|\nu|<D_{j+1}}} \frac{\partial^{|\nu|}f}{\partial Y_1^{\nu_1}\dots Y_{n+1}^{\nu_{n+1}}}(\overline{0})\cdot\prod_i\binom{\nu_i}{\mu_i}{a_i}^{\nu_i-\mu_i}$$

pour $D_k\leq|\mu|<D_{k+1}$ et de l'inégalité

$$|\prod_i\binom{\nu_i}{\mu_i}{a_i}^{\nu_i-\mu_i}| \leq (D_{k+1}!)^{n+1}$$

pour $|\nu|<D_{k+1}$ et $\sum|a_i|<1$. $\square$

Remarque 5.5.2. — Le morphisme linéaire

$$L^k_a : \mathbb{R}_{D_k,D_{k+1}}[Y_1,\dots,Y_{n+1}] \to \mathbb{R}_{D_k,D_{k+1}}[Y_1,\dots,Y_{n+1}]$$

donné par $L_a^k(P) = T_{D_kD_{k+1}}(\tau_a(P))$ est un isomorphisme, puisque l'image du monôme $\overline{X}^\nu$ est la somme de $\overline{X}^\nu$ et de termes de degré total strictement plus petit.

De plus on a l'égalité

$$|||(L_a^k)^{-1}|||_\infty = \max\{1/\|L_a^k(P)\|_\infty\,;\|P\|_\infty = 1\}.$$

Or l'application $(P, a) \mapsto 1/\|L_a^k(P)\|_\infty$ est continue sur le compact $\{\|P\|_\infty = 1\} \times [-1, 1]^{n+1}$.

On a donc un majorant $S_k \in \mathbb{R}$ sur la norme des applications linéaires $(L_{\alpha}^{k})^{-1}$, indépendant de $a \in]-1, 1[^{n+1}$.

5.6. Construction

Considérons une énumération $e : \mathbb{N} \to \Upsilon$ et posons $\Theta_s = \Phi_{e(s)}$ et $\Theta_s^{DE} = \Phi_{e(s)}^{DE}$.

On va utiliser le bon comportement par troncation des fonctions Θ_s pour construire une suite strictement croissante d'entiers $(D_s)_{s\in\mathbb{N}}$ et pour chaque $s \in \mathbb{N}$ un polynôme P_s dans $\mathbb{R}_{D_s,D_{s+1}}[Y_1, \dots Y_{n+1}]$, tels que

– la série formelle

$$F(Y_1, \dots, Y_{n+1}) = \sum_s P_s(Y_1, \dots, Y_{n+1})$$

soit le développement de Taylor en 0 d'une fonction f analytique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et

– $\tau_a(f)$ soit en dehors de l'image des Θ_s pour chaque $s \in \mathbb{N}$ et chaque $a \in]-1, 1[^{n+1}$.

La restriction de f à $[-1, 1]^{n+1}$ (qui est clairement définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n+1)}$), ne sera pas alors définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ comme nous l'avions annoncé dans la proposition 5.3.4.

Construction. — Comme annoncé à la fin du paragraphe 5.4, le défaut de surjectivité de chacun des Θ_s provient du défaut de surjectivité d'une application rationnelle $\Theta_s^{D_sD_{s+1}}$ entre des espaces de dimensions finies : si l'on fixe des entiers s et D, la fonction

$$E \mapsto \dim(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}_{0,E}[X_1, \dots, X_n]^{q(s)})^{p(s)+1})$$

est polynomiale de degré n en E, tandis que

$$E \mapsto \dim(\mathbb{R}_{D,E}[Y_1, \ldots, Y_{n+1}])$$

est polynomiale de degré $n+1$.

Notons $p(s)$ et $q(s)$ les entiers pour lesquels $e(s)$ est dans

$$(\mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_{q(s)}])^{p(s)+1} \times \left((\mathcal{F}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, n+p(s)+2\}))^{q(s)}\right)^{p(s)+1},$$

(suivant le définition de Υ dans 5.3.3),

On peut alors construire une suite strictement croissantes d'entiers $(D_s)_{s\in\mathbb{N}}$ telle que l'entier

$$\dim(\mathbb{R} \times (\mathbb{R}_{0,D_{s+1}}[X_1, \ldots, X_n]^{q(s)})^{p(s)+1}) + n + 1$$

est strictement inférieur à l'entier

$$\dim(\mathbb{R}_{D_s,D_{s+1}}[Y_1, \ldots, Y_{n+1}]),$$

et ce pour chaque s.

La suite (D_s) étant construite, supposons maintenant avoir construit pour chaque entier r strictement inférieur à un entier s un polynôme $P_r \in \mathbb{R}_{D_r,D_{r+1}}[Y_1, \ldots Y_{n+1}]$ et un réel $\eta_r > 0$ tels que

(A_r) : $\forall t < r\,,\ \|P_r\|_\infty \leq \dfrac{\eta_t}{2^r (D_{r+1}!)^{n+1}}$

(B_r) : la boule de centre P_r et de rayon $\eta_r S_r$ (où S_r est un réel pour lequel $\forall a \in]-1,1[^{n+1}$, $S_r \geq \|(T^{n+1}_{D_r D_{r+1}} \circ \tau_a)^{-1}\|_\infty$ selon la remarque 5.5.2) ne rencontre pas l'image de $\rho_r : (a,\xi) \mapsto (T^{n+1}_{D_r D_{r+1}} \circ \tau_a)^{-1} \circ \Theta_r^{D_r D_{r+1}}(\xi)$ (où a parcourt $]-1,1[^{n+1}$ et ξ parcourt $\widetilde{M_r}$).

On peut alors trouver un $P_s \in \mathbb{R}_{D_s,D_{s+1}}[Y_1, \ldots Y_{n+1}]$ et un $\eta_s > 0$ qui satisfont (A_s) and (B_s) :

soit $\delta = \min\{\dfrac{\eta_t}{2^r (D_{r+1}!)^{n+1}}\,; t < s\}$; par l'inégalité entre les dimension des espaces source et but (due au choix de D_{s+1}) et rationalité de ρ_s : $(a,\xi) \mapsto (T^{n+1}_{D_s D_{s+1}} \circ \tau_a)^{-1} \circ \Theta_s^{D_s D_{s+1}}(\xi)$, on sait que l'image de ρ_s est nullepart dense dans $\mathbb{R}_{D_s,D_{s+1}}[Y_1, \ldots Y_{n+1}]$.

De fait, on peut choisir un P_s et un η_s tels que $\|P_s\| < \delta$ et

$$B(P_s\,; \eta_s S_s) \cap \rho_s(]-1,1[^{n+1} \times \widetilde{M_s}) = \emptyset.$$

Soit $F(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ la série formelle $\sum_s P_s(Y_1, \ldots, Y_{n+1})$.

On déduit facilement de l'inégalité (A_r) que F a un rayon de convergence infini : F est donc le développement de Taylor en $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ d'une fonction analytique $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Soit a un point dans $]-1,1[^{n+1}$.

Par (B_r), on a

$$(T^{n+1}_{D_rD_{r+1}} \circ \tau_a)\big(B\,(T^{n+1}_{D_rD_{r+1}}(f)\,;\,\eta_r S_r)\big) \cap T^{n+1}_{D_rD_{r+1}}\Theta_r(M_r) = \emptyset$$

d'où, par définition de S_r,

$$B((T^{n+1}_{D_rD_{r+1}} \circ \tau_a \circ T^{n+1}_{D_rD_{r+1}})\,h\,;\,\eta_r) \cap T^{n+1}_{D_rD_{r+1}}\Theta_r(M_r) = \emptyset.$$

L'inégalité (A_s) pour $s > r$ donne alors, par la proposition 5.5.1, l'inégalité

$$\|(T^{n+1}_{D_rD_{r+1}} \circ \tau_a)\,f - (T^{n+1}_{D_rD_{r+1}} \circ \tau_a \circ T^{n+1}_{D_rD_{r+1}})\,f\|_\infty \leq \eta_r;$$

et ainsi

$$(T^{n+1}_{D_rD_{r+1}} \circ \tau_a)\,f \notin T^{n+1}_{D_rD_{r+1}}\Theta_r(M_r).$$

On a donc, comme voulu,

$$\forall a \in]-1,1[^{n+1}, \forall r \in \mathbb{N}, \tau_a\,f \notin \Phi_r(M_r),$$

□

DÉVELOPPEMENTS

Nous présentons quelques questions ouvertes par les résultats donnés dans ce mémoire.

Paires de structures contre paires de théories

Comme l'a proposé[1] PETERZIL, il serait intéressant d'étendre l'étude présentée dans ce mémoire des *paires de structures* à celle des *paires de théories* et de s'intéresser à la question suivante :

> [**Q3**] « *Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{L}'$ un sous-langage de $\mathcal{L}$ (tous deux contenant le symbole $<$).*
> *Soit T une théorie o-minimale dans le langage $\mathcal{L}$.*
> *Supposons que pour tout modèle M de T, la réduction M' de M au langage $\mathcal{L}'$ définit les mêmes fonctions d'une seule variable que M.*
> *Les langages $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ définissent-ils les mêmes ensembles et ce quelque soit l'arité considérée ?* »

Être lisse

Dans les chapitres 3 et 4, nous n'avons considéré que des structures o-minimales possédant un théorème de décomposition cellulaire de classe $\mathcal{C}^\infty$; il serait intéressant d'essayer de suprimer cette hypothèse.

[1] Communication personnelle.

Cela permettrait peut-être d'étendre le résultat principal du chapitre 3 à tous les corps réels clôs.

Notons que toutes les expansions o-minimales du corps ordonné des réels connues à ce jour admettent un théorème de décomposition cellulaire de classe $\mathcal{C}^\infty$.

L'hypothèse pourait s'avérer être redondante si l'on prouve un résultat général assurant la décomposition cellulaire $\mathcal{C}^\infty$ pour toutes les structures $\mathcal{S}$ pour lesquelles $\langle \mathcal{S} \rangle_2 \subseteq \langle \mathcal{SA} \rangle_2$.

Il semble toutefois plus raisonnable de tenter une approche directe.

Résultats explicites pour les sous-analytiques

Dans le chapitre 5, nous utilisons le fait que Gabielov donne dans [**12**] une version explicite de la modèle-complétude de la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$.

Or Denef et van den Dries dans [**8**] ou Lion et Rolin dans [**16**] assurent que la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ n'est pas seulement modèle-complète mais aussi qu'elle élimine ses quantificateurs dans un langage raisonnable et qu'elle admet un théorème de préparation.

Il serait intéressant d'essayer de préciser le caractère explicite de l'élimination des quantificateurs et du théorème de préparation.

L'obstruction principale à l'obtention de tels résultats semble être l'usage d'arguments de noethérianité de l'anneau des fonctions analytiques.

Sous-analycité séparée

Remarquons que les paires de structures données dans la Première et la Seconde Partie sont telles que les deux structures intervenant dans chacune des paires sont des réduites d'une même structure ($\mathcal{SA}$ dans la Première Partie, $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ dans la Seconde Partie).

Au vue des paires de structures « incompatibles » (*i.e.* n'admettant pas d'expansion commune) proposées dans [**38**], il serait souhaitable de chercher des paires de structures o-minimales définissant les mêmes ensembles dans une arité ≥ 2 mais n'étant pas compatibles.

En particulier, existe-t-il une expansion o-minimale $\mathcal{S}$ de $(\mathbb{R}; <)$ telle que $\langle \mathcal{S} \rangle_2 = \langle \mathbb{R}_{\mathrm{an}} \rangle_2$ mais telle que $\mathcal{S}$ n'est pas un réduit de $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$?

Plus simplement, une fonction de $]-1,1[\,^2$ qui est analytique et sous-analytique en chacune de ses variables est-elle sous-analytique en toutes ses variables ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bierstone , P. Milman : *Semianalytic and Subanalytic Sets.* , Publications Mathématiques de l'IHES no. 26 (1988).

[2] J. Bochnak , M. Coste , M-F. Roy : *Géométrie Algébrique Réelle.* , Springer (1998).

[3] S. Bochner, W. Martin : *Several Complex Variables* , Princeton Math. Series 10. Princeton Univ. Press. (1948)

[4] H. Cartan : *Théorie Élèmentaires des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables* , Hermann (1961).

[5] M. Coste : *An Introduction to semialgebraic geometry* , Dottorato di Ricerca in Matematica , Dip. Mat. Univ. Pisa. Instituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[6] M. Coste : *An Introduction to o-minimal Geometry* , Dottorato di Ricerca in Matematica , Dip. Mat. Univ. Pisa. Instituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[7] L. van den Dries : *Tame Topology and O-minimal Structures* , London Math. Soc. Lecture Note 248. Cambridge Univ. Press. (1998).

[8] J Denef , L. van den Dries : *p-adic and Real Subanalytic Sets* , Ann. Math. **128** (1988), pp 79-138.

[9] L. van den Dries , A. Macintyre , S. Marker : *The elementary theory of restricted anlytic fields with exponentiation* , Ann. Math. **140** (1994) , pp. 183-205.

[10] L. van den Dries , P. Speissegger : *The real field with convergent generalized power series* , Trans. Amer. Math. Soc. **350** 11 (1998) , pp 4377-4421.

[11] A. Gabrielov : *Projections of Semi-Analytic Sets* , Functional Analysis and its Applications **2** (1968), pp 282-291.

[12] A. Gabrielov : *Complements of Subanalytic Sets and Existential Formulas for Analytic Functions* , Invent. Math. **129** 1 (1996) , pp 1-12.

[13] E. Hrushovski : *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields* , Israël J. Math. **79** 2 (1992) , pp 129-151

[14] J. Knight , A. Pillay , C. Steinhorn : *Definable set in ordered structures II* , Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), pp 593-605.

[15] A. Kolmogorov : *On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition* , Amer. Math. Soc. Transl. **28** 2 (1953), pp 55-59.

[16] J.-M. Lion, J.-P. Rolin : *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles* , Ann. Inst. Fourier **47** 3 (1997), pp 859-884.

[17] J. Loveys , Y. Peterzil : *Linear o-minimal structures* , Israël J. Math **81** (1993), pp 1-30.

[18] S. Łojasiewicz : *Ensembles Semi-Analytiques* , monographie de l'IHES (1965).

[19] S. Łojasiewicz : *Sur la Géométrie Semi- et Sous-Analytique* , Annales de l'Institut Fourrier **43** (1993).

[20] D. Marker , Y. Peterzil , A. Pillay : *Additive reducts of real closed fields* , J. Symb. Logic **57** (1992) , pp 109-117.

[21] C. Miller : *A growth dichotomy for o-minimal expansions of ordered field* , in *Logic, from foundations to applications*, Oxford University Press (1996) , pp 385-399 (éditeurs W. Hodges , J. Hyland , C. Steinhorn , J. Truss).

[22] C. Miller , S. Starchenko : *A growth dichotomy for o-minimal expansions of ordered groups* , Trans. Amer. Math. Soc. **350** 9 (1998) , pp 3505-3521

[23] A. Mekler , M. Rubin , C. Steinhorn : *Dedekind completeness and the algebraic complexity of o-minimal structures* , Canadian J. Math. **44** (1992), pp 843-855.

[24] A. Parusiǹski : *On the preparation theorem for subanalytic functions* , prépublication Université d'Angers n° 108 (2000).

[25] Y. Peterzil : *A structure theorem for semibounded sets in the reals* , J. Symb. Logic **57** (1992) , pp 779-794.

[26] Y. Peterzil : *Reducts of some structures over the reals* , J. Symb. Logic **58** (1993) , pp 955-966.

[27] Y. Peterzil : *Zilber's conjecture for some o-minimal structures over the reals* , Ann. Pure Appl. Logic **61** (1993) pp 223-239.

[28] Y. Peterzil , S. Starchenko : *A trichotomy theorem for o-minimal structures* , Proc. London Mat. Soc. **77** (1998) , pp 481-523.

[29] A. Pillay , P. Scowcroft , C. Steinhorn : *Between groups and rings* , Rocky Mountain J. of Math. **19** 3 (1989) , pp 871-885.

[30] A. Pillay , C. Steinhorn : *Definable sets in ordered structures I* , Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), pp 565-592

[31] A. Piękosz : *Semilinear and semialgebraic loci of o-minimal sets* , Illinois J. Math. **45** (2001) , pp 1351-1359.

[32] R. Poston : *Defining multiplication in o-minimal expansions of the additive reals* , J. Symb. Logic **60** 3 (1995) , pp 797-816.

[33] S. Randriambololona : *O-minimal structures : arity versus generation* , Illinois J. Math. **49** 2 (2005) , pp 547-558.

[34] M. Rosenlicht : *Hardy fields* , J. Math. Anal. Appl. **93** (1983), pp 297-311.

[35] M. Rosenlicht : *The rank of a Hardy field* , Trans. Amer. Math. Soc. **280** 2 (1983), pp 659-671.

[36] M. Shiota : *Nash manifolds* , Springer-Verlag (1987).

[37] P. Speissegger : *The Pfaffian closure of an o-minimal structure* , J. Reine. Angew. Math. **508** (1999), pp 189-211.

[38] P. Speissegger , J.-P. Rolin , A. Wilkie : *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality* , J. Amer. Mat. Soc. **16** 4 (2003), pp 751-777.

[39] A. Tarski : *A decision method for elementary algebra and geometry* , University of California Press, 2e éd. (1951).

Résumé

Apparue au début des années 80 à la frontière entre la géométrie réelle et la théorie des modèles, la théorie des structures o-minimales est, sans aucun doute, la réalisation la plus avancée du programme de *géométrie modérée* proposé par Grothendieck dans son *Esquisse d'un Programme*.

Depuis, l'activité des spécialistes des structures o-minimales se divise principalement en deux : obtenir des résultats généraux valables dans toutes les structures o-minimales d'une part, établir la o-minimalité de certaines structures géométriques et construire de nouveaux exemples de structures o-minimales d'autre part.

C'est dans le cadre de cette seconde problématique que se situe ce travail : pour construire une nouvelle structure o-minimale, est-il nécessaire de construire de nouvelles fonctions d'une seule variable ; précisément, deux structures o-minimales peuvent-elles définir les mêmes ensembles d'arité deux sans pour autant définir les mêmes ensembles en toute arité.

Dans cette thèse, nous donnons une réponse positive à cette question.

Mieux, dans sa seconde partie, nous prouvons que la structure des ensembles sous-analytiques globaux $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ et la structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an}(n)}$ des ensembles sous-analytiques globaux définis à l'aide des fonctions analytiques restreintes de n variables définissent les mêmes ensembles d'arité $n+1$ mais que la première définit strictement plus d'ensembles que la seconde en arité $n+2$.

Dans la première partie, nous décrivons les structures o-minimales $\mathcal{C}^\infty$-lisses qui définissent, en arité deux, tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ semi-algébriques et eux seuls. Nous prouvons qu'il y a exactement deux telles structures : la structure engendrée par les courbes semi-algébriques et la structure de tous les ensembles semi-algébriques.

Mots clefs : Structures o-minimales, corps de Hardy, problème de superposition.
Classification AMS : 03C64, 26B40, 32B20, 32A05