Jean-Marie Lion
IRMAR
Université de Rennes 1
35042 Rennes Cedex, France

À Rennes, le 10 novembre 2005

Rapport sur le mémoire de thèse
de Serge Randriambololona

Structures o-minimales,
corps de Hardy
et ensembles de petite arité

La géométrie analytique réelle a connu son essor dans les années soixante sous l'impulsion de Hörmander, Łojasiewicz, Thom, Gabrielov entre autre. Dans les année quatre-vingt les logiciens apportent un regard nouveau sur la théorie en introduisant les structure o-minimales. Si l'on suit van den Dries (1998) par exemple, une structure $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{A}_n$ est une famille de sous-ensembles des espaces $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

i. Si $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{A}_n$ est une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$,
ii. Si $n, n' \in \mathbf{N}$, $A \in \mathcal{A}_n, A' \in \mathcal{A}_{n'}$ alors $A \times A' \in \mathcal{A}_{n+n'}$,
iii. Si $n, n' \in \mathbf{N}$, $A'' \in \mathcal{A}_{n+n'}$ alors $\{x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in \mathbf{R}^{n'}, (x, y) \in A''\} \in \mathcal{A}_n$,

Si de plus la famille $\mathcal{A}$ vérifie :

iiii. tout élément de $\mathcal{A}$ a un nombre fini de composantes connexes.

On dit que $\mathcal{A}$ est une structure o-minimale.

La famille $\mathcal{SA}$ des semi-algébriques est le premier exemple non trivial de structure o-minimale (Tarski 1951) : elle est formée des sous-ensembles des espaces $\mathbf{R}^n$ décrits à l'aide d'un nombre fini d'égalités et d'inégalités polynomiales. La plus petite structure $\mathcal{SOUS}$ qui contient les graphes des polynômes et des restrictions à des pavés de fonctions analytiques est o-minimale (Gabrielov 1968) : c'est la structure engendrée par les algébriques et les sous-analytiques bornés. Une structure o-minimale $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{SA}$ possède la remarquable propriété de régularité suivante :

$(*_k)$ tout élément de $\mathcal{A}$ se décompose en un nombre fini de sous-variétés de classe C^k qui sont des éléments de la structure où $k \in \mathbf{N}$ quelconque.

Si $(*_\infty)$ est vérifiée on dit que $\mathcal{A}$ possède la propriété de décomposition C^∞.

Le mémoire de Serge Randriambololona est une contribution à l'étude de la complexité des sous-ensembles semi-algébriques et des sous-ensembles sous-analytiques. Il répond à des questions naturelles et profondes sur la façon d'engendrer les familles $\mathcal{SA}$ et $\mathcal{SOUS}$ et les structures o-minimales qui possèdent la propriété de décomposition C^∞.

Après une introduction composée d'un rappel historique et d'une présentation des principaux résultats Serge RANDRIAMBOLOLONA consacre le premier chapitre à la définition précise du cadre de son travail. Le vocabulaire et les principales propriétés des structures o-minimales sont énoncés ainsi que les relations entre o-minimalité et corps de Hardy.

La plus petite structure o-minimale qui contient les semi-algébriques de $\mathbf{R}^3$ est $\mathcal{SA}$. Dans le deuxième chapitre, Serge RANDRIAMBOLOLONA considère la plus petite structure (notée $\mathcal{CSA}$) qui contient les semi-algébriques de $\mathbf{R}^2$. Cette structure est clairement incluse dans $\mathcal{SA}$. Elle est donc o-minimale. Il montre que contrairement à ce qui se passe pour les semi-algébriques de $\mathbf{R}^3$, les structures $\mathcal{CSA}$ et $\mathcal{SA}$ sont différentes. Pour y arriver il établit un résultat d'élimination des quantificateurs pour $\mathcal{CSA}$: $\mathcal{CSA}$ est la plus petite famille de sous-ensembles des espaces $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$ qui contient les semi-algébriques de $\mathbf{R}^2$ et qui vérifie i) et ii). Il déduit alors de cet énoncé que le graphe de l'addition, $\{x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = z\}$, n'appartient pas à $\mathcal{CSA}$ alors que c'est un semi-algébrique. Ce résultat montre que le corps de Hardy $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ des germes des fonctions en $0 \in \mathbf{R}$ dont le graphe appartient à une structure o-minimale $\mathcal{A}$ ne caractérise pas la structure o-minimale : par exemple $\mathbf{K}(\mathcal{SA}) = \mathbf{K}(\mathcal{CSA})$ alors que $\mathcal{SA} \neq \mathcal{CSA}$.

L'objet du troisième chapitre est de montrer qu'une structure o-minimale $\mathcal{A} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\mathcal{A}_n$ telle que $\mathcal{A}_2 = \mathcal{SA}_2$ et qui possède la propriété de décomposition C^∞ est une sous-structure de $\mathcal{SA}$. La preuve repose sur un argument de Baire combiné à des propriétés fondamentales des fonctions de Nash. Elle utilise de façon surprenante et efficace un principe que développe Gabrielov dans la version explicite de son théorème du complémentaire (1996).

Ce résultat est optimal. C'est ce que Serge RANDRIAMBOLOLONA montre dans le chapitre quatre : $\mathcal{SA}$ est la plus petite structure o-minimale $\mathcal{S}$ qui contient $\mathcal{SA}$ et qui possède la propriété de décomposition C^∞. Les trois astucieuses étapes de ce résultat sont les suivantes : montrer que $\mathcal{S}$ contient le graphe d'une fonction $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbf{R}$ strictement croissante par rapport à chacune des variables, en déduire que le graphe de l'addition et celui de la multiplication restreints à $[0, 1] \times [0, 1]$ appartiennent à $\mathcal{S}$ puis conclure grâce à un procédé d'extension que $\{x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = z\}$ et $\{x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \times y = z\}$ sont dans $\mathcal{S}$, ce qui garantit que $\mathcal{S} = \mathcal{SA}$.

Dans le cinquième et dernier chapitre de son travail, Serge RANDRIAMBOLOLONA montre que la situation des sous-analytiques est assez différente de celle des semi-algébriques. En effet si la plus petite structure qui contient les semi-algébriques de $\mathbf{R}^3$ est $\mathcal{SA}$, le théorème principal de ce chapitre affirme que pour tout entier n, la plus petite structure $\mathcal{A}(\mathcal{SOUS}_n)$ qui contient les sous-analytiques bornés et les semi-algébriques de $\mathbf{R^n}$ est différente de $\mathcal{SOUS}$. Plus précisément, les structures $\mathcal{A}(\mathcal{SOUS}_n)$ sont toutes différentes. Les clefs de la preuve sont le théorème d'uniformisation d'Hironaka, la réduction du problème géométrique à un problème fonctionnel, un résultat de troncation formelle qui évoque Weierstrass et un argument de séries majorantes. Ceci permet de construire à l'aide d'un procédé diagonal de type Cantor un élément de $\mathcal{A}(\mathcal{SOUS}_{n+1})$ qui n'appartient pas à $\mathcal{A}(\mathcal{SOUS}_n)$.

Le mémoire *Structures o-minimales, corps de Hardy et ensembles de petite arité* est un excellent travail qui présente une très grande unité. Les questions d'arité pour les semi-algébriques et les sous-analytiques qui y sont abordées sont importantes et difficiles. Elles sont remarquablement résolues. Le texte est clair, précis et très bien rédigé. Je l'ai lu avec plaisir et intérêt. Serge Randriambololona fait preuve à la fois d'une grande maîtrise de la géométrie analytique réelle et d'une grande originalité. Je suis bien sur tout à fait favorable à la soutenance de sa thèse.

À Rennes, le 10 novembre 2005

Jean-Marie Lion

Report on "Structures o-miniales, corps de Hardy et ensembles de petite eritè" by Serge Randriambololona

The thesis investigates o-minimal structures over the real numbers. What is an o-minimal structure? It is a linearly ordered set M, expanded by any collection of predicates (on cartesian products of M) and functions (of any number of variables), with the property that any solution set in 1-variable to a first-order formula is a finite union of interval whose endpoints lie in $M \cup \{\pm\infty\}$. The standard example is that of a (naturally ordered) real closed field, but today many other structures are known to be o-minimal, most of them expanding the ordered set of the reals.

The principal question asked in Ranbriambololona's thesis is the following: Consider two o-minimal structures M, M' over the real numbers. Assume that for some $n > 1$ the definable sets in n variables in M and M' are the same. Does it follow that all definable sets in M and M' are the same? Does the answer depend on n?

The main result of thesis gives a negative answer to the above, in the strongest possible sense. Namely, the author shows (see Section 5) that if M is taken to be $\mathbb{R}_{an}$ (the expansion of the real field by all restricted analytic functions) then for any number n, there is a structure M_n which has the same definable subsets of $\mathbb{R}^n$ as M does but M has definable sets (actually, it has real analytic functions) which are not definable in M_n.

This is a beautiful result, which several people have tried to reach in the past with no success. The proof requires the understanding and use of several deep theorems, by Gabrielov, Hironaka and others.

There is a curious connection to Kolmogorov's solution to Hilbert's 13-th problem: For $n \geq 3$ the above result implies in particular that there is a real analytic function on an open neighborhood of $[-1, 1]^n$ which is not first-order definable using addition, multiplication and all 1-variable functions definable in $\mathbb{R}_{an}$.

In sections 2-5 the author looks at the above question in the particular case $n = 2$, when M is taken to be $\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot \rangle$ (the definable sets in this case are the so-called semialgebraic sets).

In Section 2 he shows that if $M' = \mathcal{CS}$ is the structure generated by all semialgebraic sets in two variables then there are semialgebraic sets in three variables which are not definable in $\mathcal{CS}$. This is not so surprising since, in the o-minimal setting, the geometry of such $\mathcal{CS}$ must be trivial (in particular no group should be definable in it).

Section 3 can be seen as a positive answer to the principal question, in the special case where M is the real field and $n = 2$. The author shows that if every definable set of two variables in M' is semialgebraic then every definable set in M' is semialgebraic (one needs to add here an extra smoothness assumption about the definable sets in M' but it seems very plausible that this assumption could eventually be omitted). This section contains good work and taken together with Section 5 demonstrates an interesting model theoretic distinction between the semialgebraic setting and the general analytic setting.

In Section 4 the author shows that, in terms of the definable sets, there is no structure properly between the structure generated by the semialgebraic sets of two variables and the field structure $\langle \mathbb{R}, <, +, \cdot \rangle$.

Even though not presented in this manner, the investigation in sections 2 and 4 touches on so-called geometric model theory and a question which Zil'ber was the first to raise: How much structure is needed in order to definably recover the algebraic structure of a field? If one considers Zil'ber's geometric trichotomy of trivial, locally modular and "non-locally modular" geometries, then the author shows in the thesis that the structure $\mathcal{CS}$ considered in Section 2 has trivial geometry, while the structure considered in Section 4 is "nonlocally modular".

In conclusion, this is very good thesis, and I recommend that its author Serge Randriambololona will be awarded the degree of PhD from the University of Savoie.

Dr. Ya'acov Peterzil
Department of Mathematics
Univerity of Haifa
kobi@math.haifa.ac.il